

Experimenty se systémem Vernier

Izotermický děj



Petr Kácovský, KDF MFF UK

Tyto experimenty vznikly v rámci diplomové práce „Využívání dataloggerů ve výuce fyziky“, obhájené v květnu 2012 na MFF UK v Praze.

Materiály je možné volně používat pro výukové účely.

5.2 Izotermický děj

5.2.1 Provedení a zpracování měření

Anotace: Cílem experimentu je naměřit závislost tlaku plynu na objemu při konstantní teplotě.

Klíčové kompetence ([1]):

Gymnaziální vzdělávání – Kompetence k řešení problémů – žák:

- kriticky interpretuje získané poznatky a zjištění a ověřuje je, pro své tvrzení nachází argumenty a důkazy, formuluje a obhájí podložené závěry
- vytváří hypotézy, navrhuje postupné kroky, zvažuje využití různých postupů při řešení problému nebo ověřování hypotézy

Očekávané výstupy ([1]):

Gymn. vzdělávání – Člověk a příroda – Fyzika – Stavba a vlastnosti látek: Žák využívá stavovou rovnici ideálního plynu stálé hmotnosti při předvídání stavových změn plynu.

Gymn. vzdělávání – Člověk a příroda – Fyzika – Fyzikální veličiny a jejich měření: Žák měří vybrané fyzikální veličiny vhodnými metodami, zpracuje a vyhodnotí výsledky měření.

Teoretický úvod:

Při popisu termodynamických vlastností plynného skupenství využíváme často modelu tzv. **ideálního plynu**. Ve [21] je ideální plyn (dále IP) vymezen následovně:

- Rozměry molekul IP jsou ve srovnání se střední vzdáleností molekul od sebe zanedbatelně malé.
- Molekuly IP na sebe mimo vzájemné srážky navzájem silově nepůsobí.
- Vzájemné srážky molekul IP a srážky těchto molekul se stěnou nádoby jsou dokonale pružné.

Stojí za povšimnutí, že tento model pro plyny omezuje platnost kinetické teorie látek, která počítá se vzájemným silovým působením částic (a tedy existencí potenciální energie systému). IP je sice pouze fyzikální abstrakcí, nicméně většina plynů se za běžných teplot a tlaků (0 °C, 10⁵ Pa) tomuto modelu s určitým stupněm nepřesnosti blíží.

Pro makroskopický popis IP používáme stavové veličiny - tlak p , objem V a termodynamickou teplotu T . Lze ukázat, že pro IP stálé hmotnosti (resp. stálého látkového množství) platí:

$$\frac{pV}{T} = konst. \quad (5.1)$$

Velikost konstanty na pravé straně rovnosti je dána počtem částic N (resp. látkovým množstvím n) a jejím dosazením do vztahu výše a úpravou dostáváme tzv. stavovou rovnici IP:

$$pV = NkT = nN_A kT = nRT \quad (5.2)$$

kde k je Boltzmannova konstanta ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$), N_A Avogadrova konstanta ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) a R molární plynová konstanta, jež je součinem obou konstant předešlých ($R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$).

Izotermický děj, na který se nyní zaměříme, je takový děj s IP, při kterém zůstává teplota plynu konstantní. Vztah, který takový děj popisuje, se pak redukuje na výraz:

$$pV = \text{konst.} \quad (5.3)$$

Součin tlaku a objemu IP je za stálé teploty neměnný (Boylův - Mariottův zákon).

Potřebné měřicí vybavení: Návod byl zpracován s čidlem tlaku Vernier GPS-BTA, rozhraním Vernier Go!Link a programem Logger Pro. Alternativně lze užít tyto kombinace:

- počítač s programem Logger Lite + čidlo tlaku Vernier GPS-BTA + rozhraní Go!Link (použití programu Logger Lite neumožňuje zpracování naměřených dat, popsané v tomto návodu).
- rozhraní Vernier LabQuest + čidlo tlaku Vernier GPS-BTA

Namísto rozhraní Go!Link lze vždy použít rozhraní LabQuest nebo LabQuest Mini.

Další pomůcky: stříkačka 20 ml (je součástí dodávky tlakového čidla)

O tlakovém čidle Vernier GPS-BTA:

Čidlo měří absolutní tlak (nepřepočtený na hladinu moře) pomocí prohýbání blány, která reaguje na změny tlaku. Rozsah měřených hodnot je 0 až 210 kPa. Spolu s čidlem se dodává stříkačka a hadička, které je možné přišroubovat k závitům čidla (obr. 5.18) a rozšířit tak možnosti měření.



Obrázek 5.18: Tlakové čidlo

Provedení měření:

Pomocí tlakového čidla měříme tlak vzduchu uzavřeného v ocejchované plastové stříkačce. Pístem stříkačky měníme objem tohoto plynu. Měření probíhá tak, že do programu Logger Pro manuálně zadáváme aktuální objem vzduchu a čidlo k této zadané hodnotě přiřadí aktuálně měřený tlak. Přitom předpokládáme, že teplota vzduchu ve stříkačce je neměnná (jsou-li změny objemu dostatečně pomalé, lze předpokládat, že teplota vzduchu ve stříkačce se blíží teplotě v místnosti).

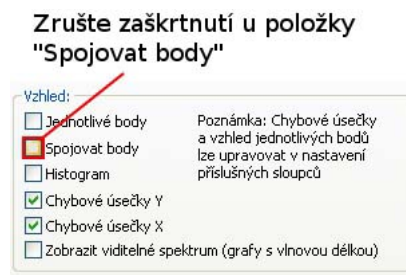
Zde je postup našeho měření:

1. Nastavte prostřední ukazatel na stříkačce na objem 10 ml a stříkačku přišroubujte k tlakovému čidlu (obr. 5.19).



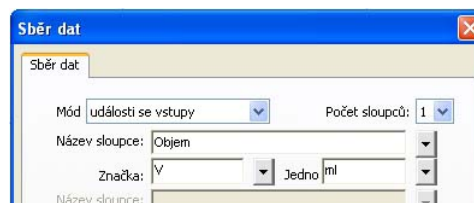
Obrázek 5.19: Příprava čidla k měření

2. Pomocí rozhraní Vernier Go!Link připojte čidlo k počítači a vyčkejte na automatickou detekci. Na plochu grafu, který se objeví, klikněte pravým tlačítkem myši, vyberte *Nastavení grafu* a v novém okně zrušte zaškrtnutí položky *Spojovat body*. Potvrďte OK.



Obrázek 5.20: Nastavení grafu

3. Klávesovou zkratkou CTRL+D vyvolejte okno *Sběr dat*, zvolte mód *Události se vstupy* a vyplňte nové okno dle obr. 5.21 (Název sloupce: *Objem*; značka: *V*; jednotky: *ml*). Potvrďte tlačítkem *Hotovo*.



Obrázek 5.21: Okno *Události se vstupy*

4. Připravený graf závislosti tlaku na objemu je na vodorovné ose škálován až do objemu 900 ml. Protože naše stříkačka má objem pouze 20 ml, změňte na tuto hodnotu také rozsah této osy. Klikněte na hodnotu 900 a přepište ji na hodnotu 20 (obr. 5.22).



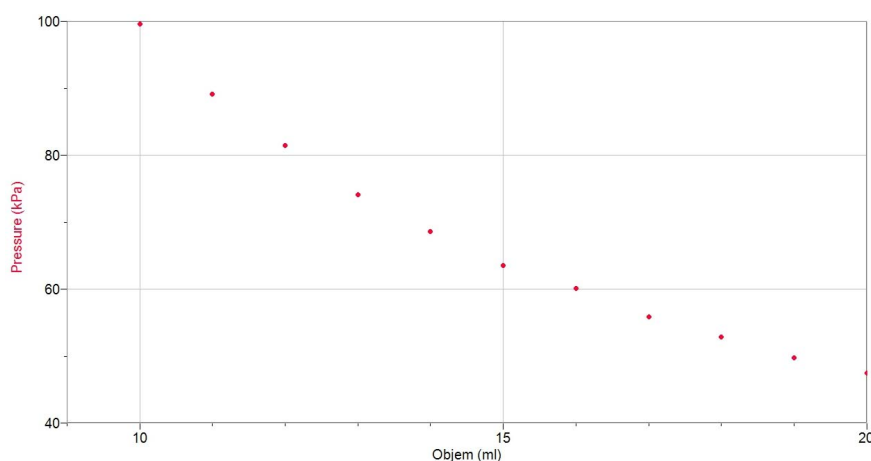
Obrázek 5.22: Změna rozsahu vodorovné osy

5. V tuto chvíli jste připraveni měřit. Spusťte měření tlačítkem *Zahájit sběr dat* (obr. 4.3). Klikněte na modré kolečko, které se objeví v pravé části hlavního panelu, a do okna, které se objeví, zadejte číselně aktuální objem vzduchu ve stříkačce (tj. v našem případě 10 ml, viz obr. 5.23). Do grafu se k tomuto zadanému objemu přiřadí aktuálně naměřený tlak.



Obrázek 5.23: Zadávání hodnot

6. Pohybem pístu stříkačky nastavte objem vzduchu na 11 ml a postup s modrým kolečkem opakujte. Stejným způsobem proměřte tlak také pro objem 12 ml, 13 ml a takto pokračujte až do 20 ml. Měření ukončete stiskem červeného tlačítka *Ukončit sběr dat*, které najdete na hlavním panelu vlevo od modrého kolečka. Ve výsledném grafu (obr. 5.24) je zobrazeno 11 naměřených dvojic objem-tlak. Není-li plocha grafu optimálně využita, použijte nástroj *Automatické měřítko* (obr. 4.3).



Obrázek 5.24: Naměřené hodnoty pro izotermický děj

Zpracovaných naměřených dat:

1. Zkuste proložit naměřenými body vhodnou křivku popsanou funkcí $p = p(V)$. Z teoretického úvodu plyne:

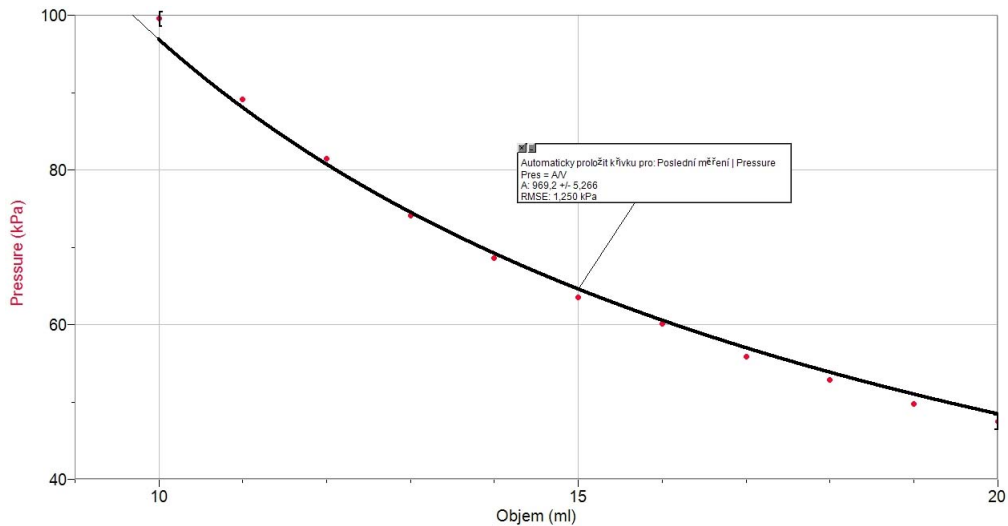
$$pV = konst. \Rightarrow p = \frac{konst.}{V} \quad (5.4)$$

Vhodnou funkcí je tedy nepřímá úměrnost, vhodnou křivkou pak větev hyperboly. K proložení využijeme nástrojů programu Logger Pro, který konstantu v čitateli automaticky označí písmenem A .

2. Na hlavním panelu klikněte na ikonu *Proložit křivku*. V nabídce *Rovnice* vyberte předpis „A/V - Převrácená hodnota“ (obr. 5.25), vyberte *Aproximovat* a potvrďte OK. Do grafu se zakreslí křivka popsána funkcí $p(V) = \frac{A}{V}$, kde A je konstanta na pravé straně rovnice 5.4. Program zobrazuje předpis proložené závislosti, dopočtenou hodnotu konstanty A a chybu aproximace (RMSE = *root-mean-square error*). Je patrné, že proložená větev hyperboly poměrně dobře aproximuje naměřenou závislost (obr. 5.26).



Obrázek 5.25: Výběr aproximující křivky



Obrázek 5.26: Aproximace naměřených hodnot hyperbolou $p(V) = \frac{A}{V}$

3. Pomocí konstanty A nyní odhadneme látkové množství vzduchu ve stříkačce. Konstanta A je vypočítána v takových jednotkách, ve kterých jsou škálovány osy grafu, tedy např. ve vzorovém měření:

$$A \doteq 969 \text{ ml} \cdot \text{kPa} = 969 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{Pa} = 0,969 \text{ J} \quad (5.5)$$

(Povšimněte si, že součin pV má jednotku joule - stavová rovnice IP je tedy vlastně určitou formou zákona zachování energie.) Z rovnic 5.2 a 5.3 plyne:

$$A = nRT \Rightarrow n = \frac{A}{RT} \quad (5.6)$$

Použijeme-li předpoklad, že pro dostatečně pomalé změny objemu je teplota vzduchu ve stříkačce rovna teplotě místnosti, stačí nyní již jen změřit teplotu místnosti a dosadit do vztahu 5.6. V našem případě:

$$t \doteq 22 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T \doteq 295 \text{ K} \quad (5.7)$$

$$n \doteq \frac{0,969}{8,31 \cdot 295} \text{ mol} \doteq 395 \mu\text{mol} \quad (5.8)$$

4. Pomocí proložení grafu nepřímé úměrnosti naměřenými body jsme z matematického vyjádření této křivky určili látkové množství vzduchu ve stříkačce. Stejným způsobem můžeme z konstanty A určit také počet částic N ve stříkačce.

5.2.2 Poznámky, otázky a úkoly

Příprava experimentu

- Důkladně přišroubujte stříkačku k čidlu, aby nedošlo k jejímu uvolnění.

Během měření

- Při manipulaci s pístem stříkačky je vhodné dotýkat se těla stříkačky co nejméně - v opačném případě může teplem dlaní docházet k zahřívání plynu uvnitř.
- Pístem pohybujte pozvolna, lépe se tak přiblížíte modelu izotermického děje.

Otázky a úkoly pro studenty

1. Má model IP nějaká logická omezení, za jejichž hranicí přestává dávat fyzikální smysl? (Jak je to s platností modelu například pro teploty blízké se 0 K?) Pro ověření vašich odpovědí vyhledejte, v jakém rozmezí tlaků a teplot je model IP s rozumnou přesností použitelný.

→ Model platí v poměrně úzkém rozmezí v okolí tzv. normálních podmínek, tj. 0 °C, 10⁵ Pa. Pro teploty blízké 0 K předpovídá model IP (např. pro stálý tlak) téměř nulový objem plynu - model tedy zanedbává rozměry atomů a molekul.

2. Bylo by možné určit látkové množství vzduchu ve stříkačce ještě jiným způsobem (event. způsoby) než ze stavové rovnice IP? Jaké údaje je k tomu třeba znát? Proveďte alternativní výpočet látkového množství a porovnejte ho s výsledkem získaným ze stavové rovnice.

→ Pro výpočet látkového množství vzduchu lze užít vztah

$$n = \frac{m}{M_m}, \quad (5.9)$$

kde m je hmotnost vzduchu ve stříkačce a M_m jeho molární hmotnost. Známe-li při dané teplotě hustotu ρ vzduchu o objemu V , určíme pak látkové množství jako:

$$n = \frac{\rho V}{M_m}. \quad (5.10)$$

Konkrétně: Hustotu ρ ve vztahu 5.10 určíme ze vztahu uvedeného ve [22] (vzduch ve stříkačce budeme považovat za suchý), objem $V = 10$ ml a molární hmotnost vzduchu je dle [22] $M_m = 28,96 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. V případě našeho vzorového měření dostáváme:

$$n = \frac{\rho V}{M_m} \doteq \frac{1,18 \cdot 10^{-5}}{28,96 \cdot 10^{-3}} \text{ mol} \doteq 407 \mu\text{mol} \quad (5.11)$$

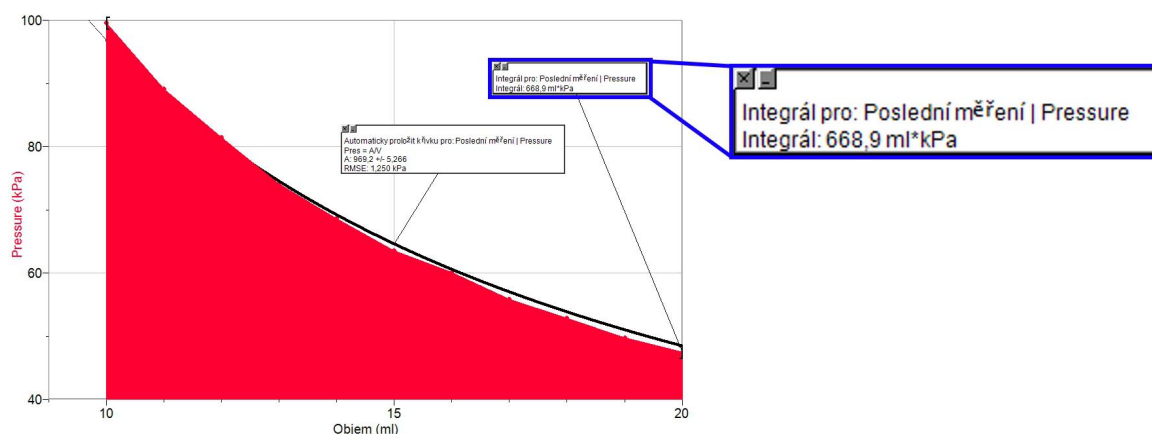
Dostali jsme tedy výsledek blízký hodnotě zjištěné z aproximace grafem nepřímé úměrnosti. Další alternativnou by bylo určení látkového množství za pomoci znalosti, že objem 1 molu libovolného plynu je za standardních podmínek konstantní. (Kdybychom naše podmínky považovali za standardní, dává tento postup výsledek $n = 446 \mu\text{mol}$.) Nyní můžete vyzvat žáky, aby porovnali přesnost těchto metod.

- Látkové množství tak, jak s ním pracujeme, je definováno pro chemicky stejnorodou (homogenní) látku. Co tento pojem znamená? Splňuje vzduch podmínku chemické stejnorodosti?
 ↳ Chemicky stejnorodé látky mají v každé části svého objemu stejné vlastnosti. Z hlediska našich makroskopických termodynamických měření lze vzduch považovat za chemicky stejnorodou látku.
- Pomocí provedené aproximace nepřímou úměrností a stavové rovnice IP určete počet částic vzduchu ve stříkačce.
 ↳ Ze vztahů 5.4 a 5.2 dostáváme: $N = \frac{A}{kT}$.
- Je hyperbola jedinou křivkou, která vhodně aproximuje naměřená data? Zkuste v programu Logger Pro proložit získanými body například exponenciální závislost. Mohli bychom bez teoretického základu jen na základě aproximace rozhodnout, která křivka naměřeným hodnotám odpovídá?
 ↳ Pravděpodobně se vám stane, že exponenciální funkce ve tvaru $p(V) = Ae^{-B \cdot V} + C$ (A, B, C jsou konstanty) proloží naměřené hodnoty ještě přesněji než hyperbola $p(V) = \frac{A}{V}$. Ne vždy nám tedy fyzikální měření dávají jednoznačně interpretovatelné výsledky.

5.2.3 Rozšíření úlohy 1: Práce IP

1. S naměřenou pV závislostí budeme dále pracovat. Ve [21] je ukázáno, že plocha pod grafem funkce $p = p(V)$ má význam práce vykonané IP při izotermické změně objemu. (To koresponduje s tím, že $[pV] = \text{J}$.) K určení plochy pod grafem nepřímé úměrnosti uijeme nástroje programu Logger Pro.

2. Na hlavním panelu klikněte na ikonu *Integrál* (obr. 4.3). Plocha pod grafem se vybarví a program spočítá její obsah, který odpovídá práci W vykonané IP při izotermickém zvětšení objemu z 10 ml na 20 ml (obr. 5.27). V případě vzorového měření $W \doteq 670 \text{ ml} \cdot \text{kPa} = 670 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{Pa} = 0,670 \text{ J}$.



Obrázek 5.27: Výpočet práce vykonané IP při izoterm. změně objemu z 10 na 20 ml

Otázky a úkoly pro studenty

1. Povšimněte si, jakým způsobem program plochu vybarvil. Jde opravdu o plochu pod proloženou křivkou? Byli byste schopni navrhnout, jakým způsobem program plochu nejspíše počítá? Jak by se dal takový postup zpřesnit?
↳ Program Logger Pro nevybírá plochu pod proloženou křivkou, ale vždy plochu pod spojnici dvou následujících bodů. Obsah této jedné plochy je vlastně obsahem pravoúhlého lichoběžníka, sčítání obsahů takových lichoběžníků pak aproximuje obsah celé plochy pod naměřenou závislostí. Jde o ukázkou numerické integrace, kterou počítače využívají při výpočtu obsahu složitých geometrických obrazců. Kdybychom v našem experimentu měnili objem například po 0,5 ml, dostali bychom touto metodou přesnější výsledek než při postupu po 1 ml.

5.2.4 Rozšíření úlohy 2: Van der Waalsův plyn

1. Ideální plyn je pouze jedním z mnoha modelů popisujících termodynamické vlastnosti plynného skupenství. O něco složitější popis pomocí stavových veličin nabízí tzv. **van der Waalsova stavová rovnice**, která na rozdíl od modelu IP zohledňuje vlastní objem molekul plynu (tj. nepracuje s neomezenou stlačitelností) a předpokládá přitažlivé síly mezi molekulami. Van der Waalsova rovnice má tuto podobu (viz např. [21]):

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{n} - b\right) = RT, \quad (5.12)$$

kde p je tlak plynu, V jeho objem, n látkové množství, R molární plynová konstanta, T termodynamická teplota a a , b konstanty vyjadřující „neideálnost“ plynu (závislé na druhu plynu).

2. Chceme-li aproximovat naměřenou závislost tímto modelem, musíme nejdřív vyjádřit tlak jako funkci objemu $p = p(V)$. Z rovnice 5.12 plyne:

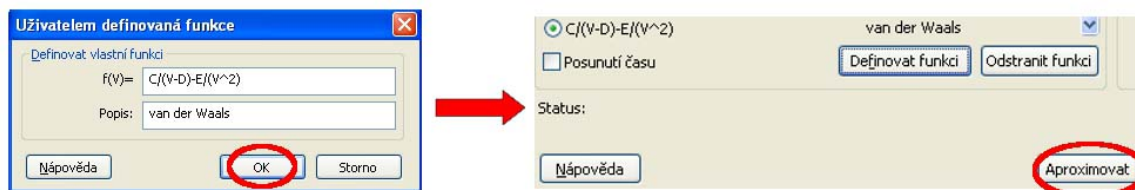
$$p(V) = \frac{nRT}{V - bn} - \frac{n^2 a}{V^2} \quad (5.13)$$

Protože látkové množství ani teplota se při našem experimentu nemění, definujeme nové konstanty C , D , E takto: $nRT = C$; $bn = D$; $n^2 a = E$. Tím dostáváme vztah:

$$p(V) = \frac{C}{V - D} - \frac{E}{V^2} \quad (5.14)$$

3. Pojdme touto závislostí $p = p(V)$ proložit naměřené hodnoty. V grafu naměřených hodnot ponechte pouze proloženou hyperbolu, ostatní úpravy (např. integrál) smažte. Na hlavním panelu klikněte na ikonu *Proložit křivku* a vyberte *Definovat funkci*. Do okna, které se objeví, zadejte předpis z rovnice 5.14 (obr. 5.28), potvrďte *OK*, zvolte *Aproximovat* a znovu *OK*. Naměřenými body se proloží křivka, která

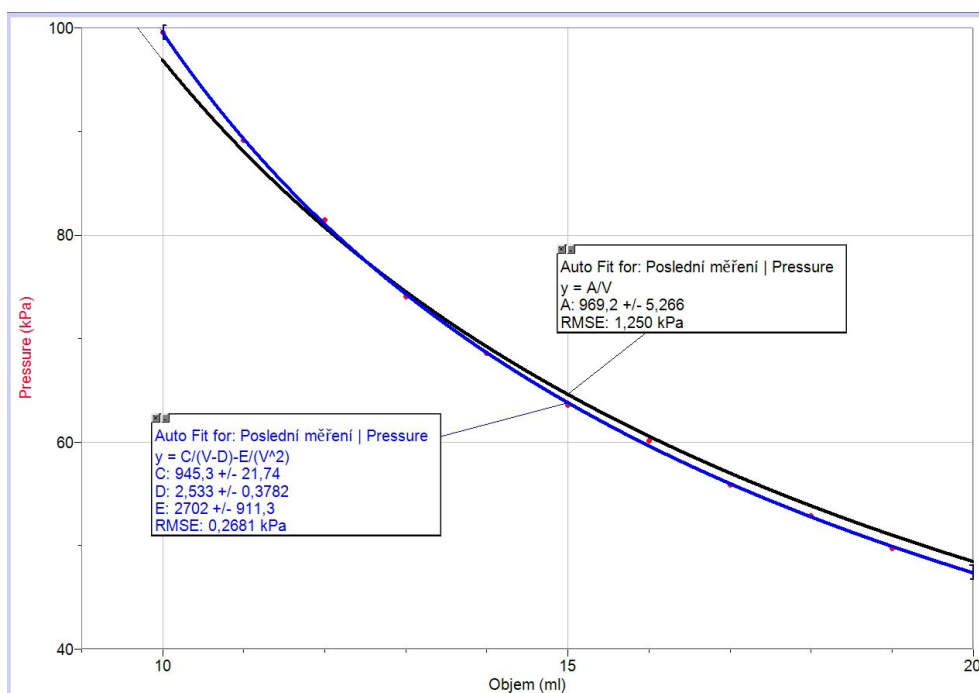
je aproximuje výrazně přesněji než hyperbola (srovnání obou křivek ukazuje obrázek 5.29).



Obrázek 5.28: Zadání předpisu $p = p(V)$ z van der Waalsovy stavové rovnice

Otázky a úkoly pro studenty

1. Program Logger Pro určil čísla C , D , E . Interpretujte význam konstanty C .
 ↳ Konstanta C má stejný význam jako konstanta A při prokládání hyperbolou, jde o součin nRT . V našem měření se konstanty A a C liší asi o 2,5 % větší z nich.
2. Je překvapující, že předpis 5.14 aproximuje naměřená data lépe než hyperbola?
 ↳ Zatímco v předpisu hyperboly byl jediný volný parametr A , v tomto předpisu jsou hned tři volné parametry. Více volných parametrů zde dává více možností, jak nafitovat vhodnou křivku. První člen předpisu je vlastně opět větev hyperboly (ovšem tentokrát s možností posunutí po vodorové ose), druhý odečítaný člen umožňuje další korekce. (Můžete před žáky zmínit možnost přesnějších a přesnějších aproximací polynomy - intuitivní Taylorův rozvoj.)



Obrázek 5.29: Černá křivka ukazuje aproximaci naměřených hodnot pro model IP, modrá pro model van der Waalsova plynu