Experimenty se systémem Vernier

Tuhost pružiny

Petr Kácovský, KDF MFF UK

Tyto experimenty vznikly v rámci diplomové práce „Využívání dataloggerů ve výuce fyziky“, obhájené v květnu 2012 na MFF UK v Praze.

5.3 Tuhost pružiny

5.3.1 Provedení a zpracování měření

Anotace: Cílem experimentu je určit tuhost pružiny pomocí siloměru a čidla pohybu a porovnat s výsledkem získaným výpočtem.

Klíčové kompetence ([1]):
Gymnaziální vzdělávání – Kompetence k řešení problémů – žák:

- vytváří hypotézy, navrhuje postupné kroky, zvažuje využití různých postupů při řešení problému nebo ověřování hypotézy
- kriticky interpretuje získané poznatky a zjištění a ověřuje je, pro své tvrzení nachází argumenty a důkazy, formuluje a obhajuje podložené závěry

Gymnaziální vzdělávání – Kompetence komunikativní – žák:

- efektivně využívá moderní informační technologie

Očekávané výstupy ([1]):
Gymn. vzdělávání – Člověk a příroda – Fyzika – Fyzikální veličiny a jejich měření: Žák měří vybrané fyzikální veličiny vhodnými metodami, zpracuje a vyhodnotí výsledky měření.

Teoretický úvod: (částečně převzato z [23])

Závaží zavěšené na pružině je ve výuce fyziky nejběžnější realizací mechanického oscilátoru. Zavěsíme-li na pružinu o počáteční délce l závaží o hmotnosti m, začne na tuto pružinu působit síla pružnosti $F_\mathrm{p} = k\Delta l$, kde Δl je prodloužení pružiny po zavěšení závaží a k **tuhost pružiny**, konstanta popisující vlastnost konkrétní pružiny. V rovnovážné poloze se velikost síly F_p vyrovná velikosti tíhové síly, působící opačným směrem, závaží je tedy v klidu a platí:

$$mg = k\Delta l \Rightarrow k\Delta l - mg = 0 \tag{5.15}$$

kde g je tíhové zrychlení. Zanedbáváme vlastní hmotnost pružiny.

Vychýlíme-li nyní závaží ve vertikálním směru a pustíme ho, uvedeme jej do kmitavého pohybu. Zatímco tíhová síla působící na závaží se nemění, mění se velikost síly pružnosti - nyní platí: $F_\mathrm{p} = k(\Delta l - y)$, kde y je aktuální výchylka závaží z rovnovážné polohy (pod rovnovážnou polohou uvažujeme záporné hodnoty y, nad ní kladné). Pro velikost výsledné síly působící na závaží pak lze psát:

$$F = F_\mathrm{p} - F_\mathrm{G} = k(\Delta l - y) - mg \tag{5.16}$$

Protože podle vztahu 5.15 je $k\Delta l - mg = 0$, platí:

$$F = -ky \tag{5.17}$$

Velikost síly působící na kmitající těleso je tedy přímo úměrná jeho výchylce z rovnovážné polohy. Nachází-li se závaží pod rovnovážnou polohou, míří síla vzhůru a naopak, v rovnovážné poloze je nulová.

Každé reálné kmitání je tlumené, nicméně délka našeho měření bude dostatečně krátká, abychom mohli kmitání závaží považovat za netlumené. Takové kmitání mechanického oscilátoru je pak harmonické a lze jej popsat úhlovou frekvencí ω. Lze ukázat, že úhlová frekvence vlastního kmitání závaží souvisí s parametry pružiny a závaží vztahem:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{5.18}$$

Odtud pro periodu kmitání T platí:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \tag{5.19}$$

Potřebné měřicí vybavení: Návod byl zpracován se senzory Vernier Go!Motion a Vernier DFS-BTA, rozhraním Vernier Go!Link a programem Logger Pro. Alternativně lze užít tyto kombinace:

- místo programu Logger Pro program Logger Lite či rozhraní Vernier LabQuest
- pro připojení k počítači lze namísto rozhraní Go!Link vždy použít rozhraní LabQuest nebo LabQuest Mini (v takovém případě lze namísto čidla Go!Motion použít čidlo Vernier MD-BTA)

Další pomůcky: laboratorní stojan, pružiny různé tuhosti, závaží, laboratorní váhy

O čidle Vernier Go!Motion:
Viz experiment *Kam se ztrácí energie*.

O čidle Vernier DFS-BTA:
Čidlo umožňuje měřit sílu v tahu či tlaku v rozsazích ±10 N a ±50 N (nejmenší měřitelná síla je 0,01 N). Protože běžně používané závaží bude mít hmotnost do cca 150 g, budeme v našem měření pracovat výhradně s rozsahem ±10 N.

Obrázek 5.30: Přepínač rozsahů

Provedení měření:

Pomocí dvojice čidel budeme současně snímat aktuální výchylku závaží z rovnovážné polohy a velikost síly pružnosti, která deformuje pružinu.

1. Pomocí rozhraní Vernier Go!Link připojte k počítači siloměr Vernier DFS-BTA, pomocí USB vstupu připojte čidlo Vernier Go!Motion a vyčkejte na automatickou detekci. Po úspěšné detekci obou čidel zobrazí program Logger Pro tři připravené grafy časových závislostí, svislé osy jsou postupně popsány veličinami *Force*, *Vzdálenost* a *Velocity*.

2. Graf závislosti rychlosti kmitajícího závaží na čase nebudeme pro další úvahy potřebovat - klikněte na plochu tohoto grafu a klávesou *Delete* jej odstraňte. Zkratkou CTRL+R zvětšíte zbylé dva grafy tak, aby byla obrazovka optimálně využita.

Obrázek 5.31: Uspořádání experimentu

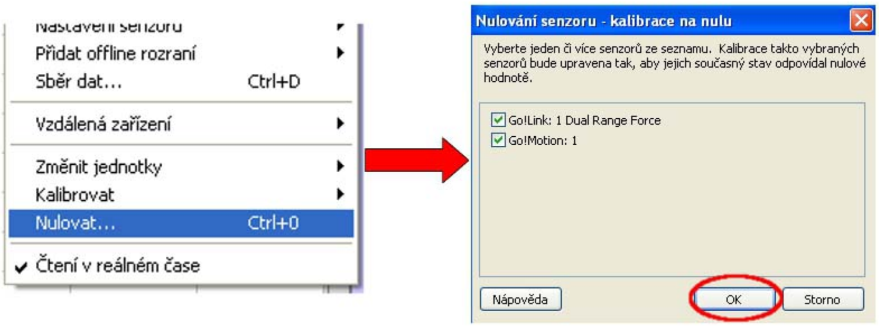
3. Klávesovou zkratkou CTRL+D vyvolejte okno *Sběr dat*, nastavte délku měření 5 sekund a vzorkovací frekvenci 50 Hz. Potvrďte tlačítkem *Hotovo*.

4. Pomocí laboratorních vah (nebo přímo pomocí připojeného siloměru) určete hmotnost závaží, které bude představovat mechanický oscilátor kmitající na pružině (obr. 5.31). Tuto hmotnost si zapište, při vyhodnocování měření ji budeme potřebovat. Ve vzorovém měření je $m = 73{,}9$ g.

5. Jedním ze dvou způsobů zobrazených na obr. 5.31 připevněte siloměr k laboratornímu stojanu. Svisle pod kovový háček umístěte měřicí hlavu čidla pohybu, rozkmitejte závaží a posunem čidla ve vertikálním směru zajistěte, aby ani ve své nejnižší poloze nebyla vzdálenost závaží od čidla menší než 20 centimetrů. (Menší vzdálenosti čidlo pohybu neregistruje.)

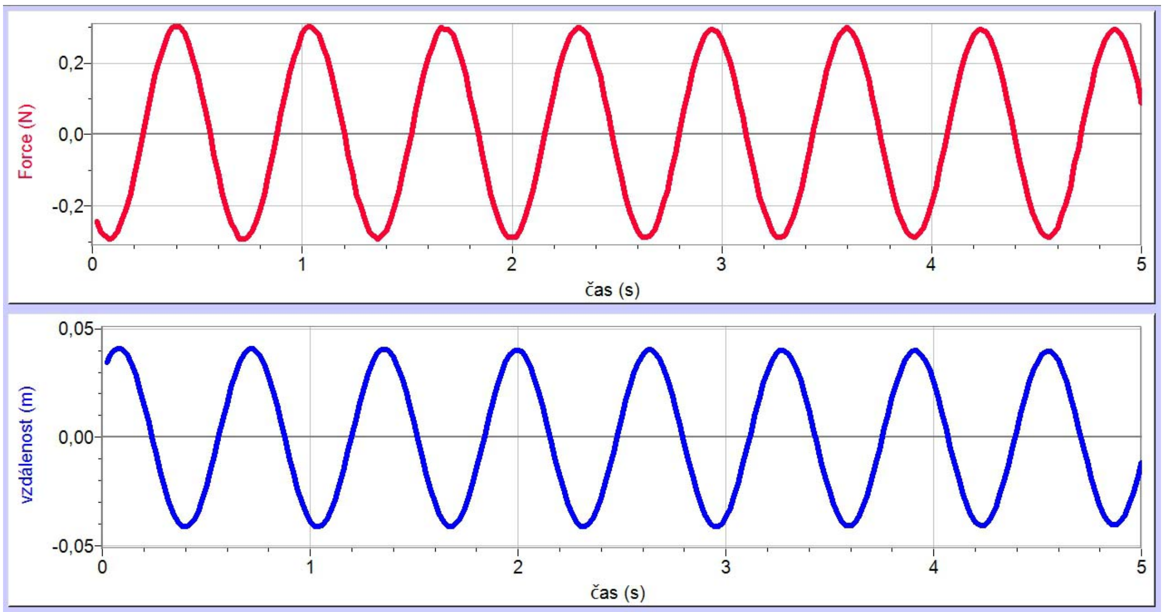
6. Nechte závaží opět ustálit, poté vyberte *Experiment - Nulovat* a v okně, které se otevře, ponechte zaškrtnuté nulování obou čidel. Potvrďte OK (viz obr. 5.32).

7. Nyní jste připraveni měřit. Rozkmitejte závaží ve vertikálním směru a tlačítkem *Zahájit sběr dat* (obr. 4.3) spusťte měření.



Obrázek 5.32: Nulování čidel

8. Po uplynutí 5 sekund se měření ukončí. Program zobrazuje časové průběhy aktuální výchylky závaží a síly působící na závaží. Pro optimální využití plochy grafu využijte tlačítko *Automatické měřítko* (obr. 4.3). Ukázku vzorového měření najdete na obr. 5.33. Nyní lze snadno ukázet, že v rovnovážné poloze je výslednice sil působících na závaží nulová, zatímco největší velikost má při největší výchylce závaží (v obou směrech).



Obrázek 5.33: Vzorově naměřená závislost

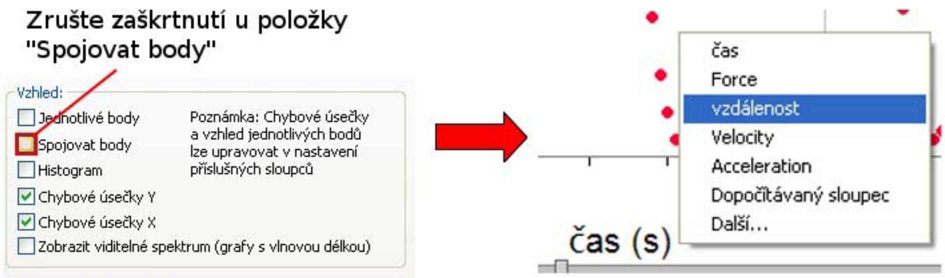
Zpracování naměřených dat:

1. Ještě než začneme měření vyhodnocovat, je vhodné si zkontrolovat, že naměřená data odpovídají zavedení v *Teoretickém úvodu* - výchylkám z rovnovážné polohy směrem dolů jsou vzhledem k uspořádání měření skutečně přiřazeny záporné hodnoty a naopak. Protože tuhost je kladná konstanta, mělo by také platit, že ke kladným výchylkám přísluší záporné hodnoty síly a naopak - i tento požadavek námi naměřená data splňují.

2. Tuhost pružiny určíme pomocí nástrojů programu Logger Pro ze vztahu 5.17, kde tato fyzikální veličina představuje konstantu úměrnosti v lineárním vztahu mezi výslednou silou a výchylkou závaží. Nejdříve si ale tuto lienární závislost zobrazíme (viz následující body 3 až 5).

3. Označte myší graf závislosti vzdálenosti na čase a klávesou *Delete* tento graf odstraňte. Klávesovou zkratkou CTRL+R roztáhněte graf do celého měřicího okna.

4. Klikněte pravým tlačítkem na plochu zbylého grafu, vyberte *Nastavení grafu* a zrušte zaškrtnutí u položky *Spojovat body* (obr. 5.34). Potvrďte poklepáním na *Hotovo.*



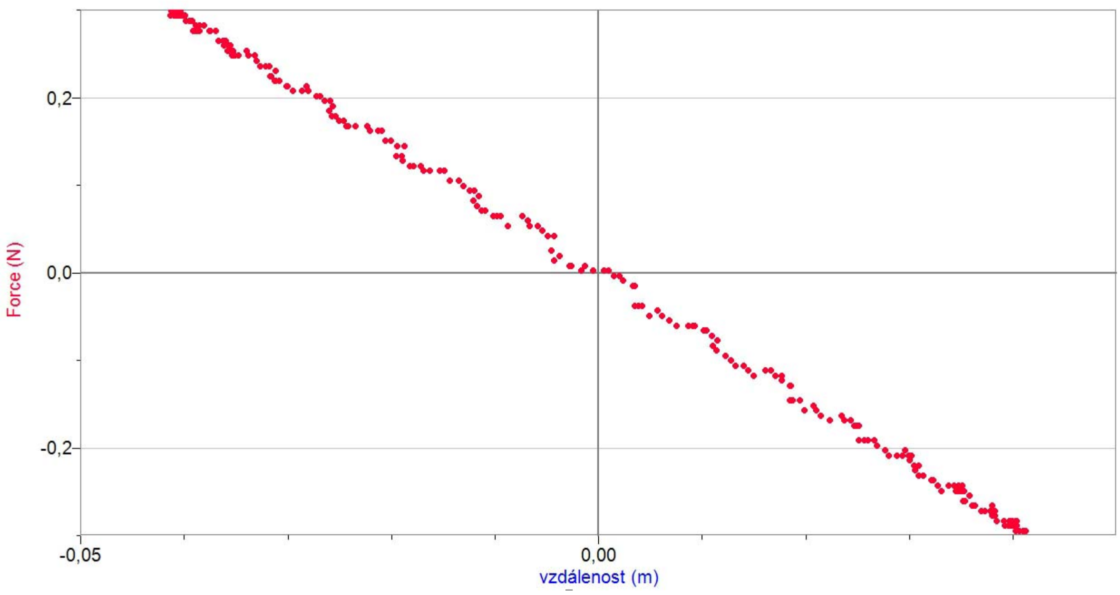
Obrázek 5.34: Změny v grafu

5. Nyní klikněte na popisek vodorovné osy („čas“) a vyberte namísto času „vzdálenost“ (obr. 5.34). Protože body se seskupí do levé části obrazovky, uzpůsobte velikost grafu příkazem *Automatické měřítko* (viz. 4.3).

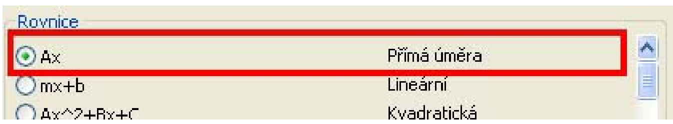
6. Máte před sebou kýženou závislost výsledné síly na aktuální výchylce závaží (obr. 5.35). Jak jsme již řekli, tuhost je kladná konstanta, proto jsme dle vztahu 5.17 mohli očekávat klesající lineární závislost - tu jsme nyní skutečně získali.
(Je vhodné zde studenty upozornit, že před sebou mají všechny naměřené dvojice síla-výchylka, které čidla během měření zaznamenala, zdůraznit, že časová závislost nás již nezajímá.)

7. Ze vztahu 5.17 je patrné, že tuhost pružiny určíme jako směrnici přímky, proložené získanou závislostí síly na výchylce; nejdříve je tedy nutné proložit naměřenými hodnotami příslušnou přímku. Na hlavním panelu klikněte na ikonu *Proložit křivku.* V nabídce *Rovnice* vyberte předpis „Ax - Přímá úměra“ (obr. 5.36), vyberte *Aproximovat* a potvrďte OK. Do grafu se zakreslí křivka popsaná funkcí $F(x) = Ax$, kde x hraje roli výchylky y. Program zobrazuje předpis proložené závislosti, dopočtenou hodnotu konstanty A a chybu aproximace (RMSE = *root-mean-square error*). Srovnáním se vztahem 5.17 je patrné, že konstanta A má význam záporně vzaté tuhosti $-k$. V případě vzorového měření jsme tedy určili tuhost pružiny jako přibližně $7,2\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$.

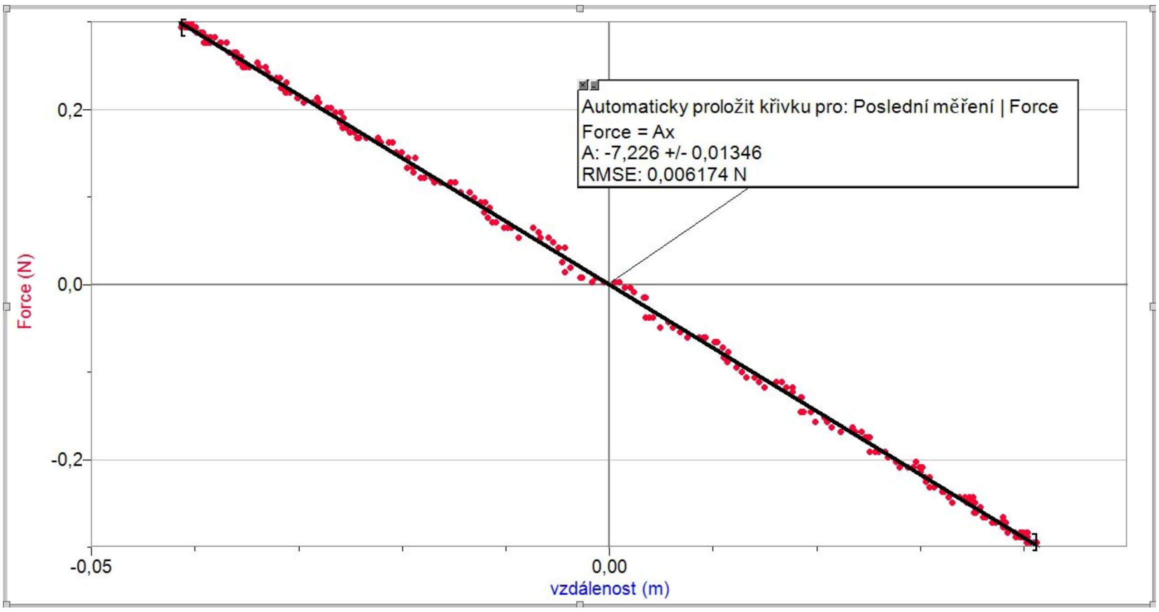
8. Podobným způsobem můžete proměřit tuhost dalších pružin.



Obrázek 5.35: Graf závislosti výsledné síly na výchylce z rovnovážné polohy



Obrázek 5.36: Výběr aproximující křivky



Obrázek 5.37: Aproximace naměřených hodnot funkcí $F(x) = Ax$

5.3.2 Poznámky, otázky a úkoly

Příprava experimentu

- Zajistěte, aby se mezi zkoumané závaží a měřicí hlavu sonaru nedostala žádná překážka, jež by mohla být zdrojem parazitních odrazů (typicky kabel siloměru).
- Ověřte, že ani ve své nejnižší poloze se závaží nepřibližuje sonaru na menší vzdálenost než 20 cm.
- Je v zásadě jedno, jaký pracovní režim čidla pohybu (viz experiment *Kam se ztrácí energie*) použijete.

Během měření

- Rozkmitejte závaží tak, aby pohyb probíhal výhradně nahoru-dolů, minimalizujte kývání závaží do stran.
- Není třeba udělit závaží velkou počáteční výchylku, již při výchylce kolem 1 cm je měření poměrně přesné.

Otázky a úkoly pro studenty

1. Vysvětlete pojmy pružinový oscilátor, harmonické kmitání, tlumené kmitání.
2. Jakých zanedbání se při měření dopouštíme?
   $\mapsto$ Kmitání závaží je tlumené, postupně klesá jeho amplituda. Navíc jen velmi těžko zajistíme, aby závaží kmitalo pouze ve vertikálním směru, dochází i k výchylkám do stran. Po celou dobu měření zanedbáváme hmotnost pružiny.
3. Jaký význam má nulování čidel? Jak by výsledky měření vypadaly bez něj?
   $\mapsto$ Nastavíme-li rovnovážnou polohu jako nulovou hodnotu pro sílu i výchylku, stává se měření přehlednějším, nemusíme uvažovat neměnící se tíhovou sílu, resp. neměnící se vzdálenost rovnovážné polohy závaží od měřicí hlavy čidla.
4. Jakým způsobem je vhodné z naměřených dat získat tuhost pružiny?
   $\mapsto$ Jistě by bylo možné z několika dvojic hodnot vypočítat podle vztahu 5.17 tuhost, fyzikálně správnější je ale postup popsaný výše, který využívá aproximace funkcí přímá úměrnost.
5. Povšimněte si, že v grafu na obrázku 5.35 je nejvíce naměřených bodů koncentrováno v oblasti maximální a minimální výchylky (tj. v krajních polohách závaží), naproti tomu v okolí rovnovážné polohy (střední část grafu) je naměřených hodnot nejméně. Umíte vysvětlit, proč?
   $\mapsto$ V rovnovážné poloze má kmitající závaží maximální rychlost a pobývá tedy v jejím okolí pouze krátký čas. Naproti tomu v krajních polohách, kdy dochází ke změně směru rychlosti, se závaží na okamžik zastavuje, vyskytuje se zde poměrně dlouhý časový úsek, za který se zaznamená hned několik bodů.

5.3.3 Kontrola výsledku:

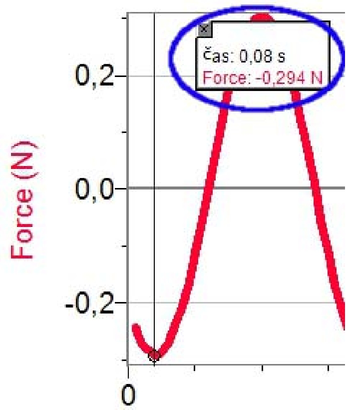
1. Nyní se pokusíme získaný výsledek potvrdit pomocí vztahu 5.19. Hmotnost závaží jsme již zjistili, zbývá určit příslušnou periodu kmitů.

2. Vraťte se k původní podobě naměřených závislostí, jak je ukazuje obr. 5.33 (pokud jste již v dosud upravovaném souboru uložili změny, naměřte se stejnou pružinou i závažím novou závislost). Vyberte nástroj *Odečet hodnot* (obr. 4.3) a pomocí okna, které se objeví, odečtěte dobu trvání několika period (obr. 5.38).

3. Ve vzorovém měření byly odečteny časy $t_1 = 0,08$ s a $t_2 = 4,56$ s, vymezující 7 period, odtud doba rovná jedné periodě je přibližně $T \doteq 0{,}64$ s; připomeňme si hmotnost závaží $m = 73{,}9$ g.

4. Dosadíme nyní tyto hodnoty do vztahu 5.19:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \doteq \frac{4\pi^2 \cdot 73,9 \cdot 10^{-3}}{0,64^2}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \doteq 7,1\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \tag{5.20}$$



Obrázek 5.38: Odečet hodnot

Otázky a úkoly pro studenty

1. Bylo by možné nějak zkontrolovat, zda je výsledek získaný v první části měření správný?

   ↦ Ano, ze vztahu 5.19, tj. určením z hmotnosti závaží a periody jeho kmitů.

2. Je podstatné, zda budeme periodu odečítat z časového průběhu síly nebo z časového průběhu výchylky?

   ↦ Již jsme prokázali mezi těmito veličinami lineární vztah, periodu tedy můžeme určovat stejně dobře z obou grafů.