Fermiho úlohy

Renata Holubová
Přírodovědecká fakulta UP Olomouc, Katedra experimentální fyziky, e-mail: renata.holubova@upol.cz

Úvod

Soutěž Fermiho úlohy je jedna z mnohých aktivit, které organizuje Katedra experimentální fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. V e školním roce 2011/2012 byl zahájen již šestý ročník této soutěže. Soutěž probíhá ve dvou korespondenčních kolech, úspěšní řešitelé prvního či druhého kola (popř. obou kol) postupují do velkého Finále, které probíhá přímo na Přírodovědecké fakultě v Olomouci.

Fermiho úlohy

Úlohy byly pojmenovány po italském fyzikovi Enrico Fermim, který byl známý pro svou neobvyklou schopnost jednoduchým a rychlým způsobem řádově odhadnout fyzikální veličiny.

Fermiho problémy (otázky) jsou blízké realitě všedního života a na první pohled se zdá, že jsou bez zadání dalších potřebných informací neřešitelné. Při řešení nejde o to hledané výsledky přesně vyčíslit, ale jen řádově správně odhadnout s pomocí jednoduchých fyzikálních vztahů, zkušeností z každodenního života a trochou zdravého rozumu. Výsledky se dají v mnoha případech snadno prověřit a většinou odhad překvapivě dobře souhlasí se skutečnou hodnotou. Podstatou řešení Fermiho úlohy je správně odhalit jádro daného problému a rozdělit jej na jednotlivé dílčí kroky. Ke správné hodnotě dospějeme kladením vhodných otázek. Zpravidla existuje více způsobů řešení daného problému, přičemž tyto způsoby jsou různě obtížné, např. některé údaje můžeme odhadnout srovnáním s tabulkovými hodnotami nebo je třeba určit experimentálně. Struktura kladených otázek, pomocí nichž nalezneme řešení, není předem dána. Neomezujeme se jen na fyzikální tématiku, ale hledáme souvislosti s jinými předměty.

Uměním při řešení Fermiho problému je tedy správně odhalit jádro daného problému a systematicky jej strukturovat. Pomocí šikovného strukturování Fermiho problému můžeme získat vynikající odhad. Jak problém můžeme rozčlenit, lze názorně ukázat na slavné Fermiho otázce: *„Kolik ladičů pián je potřeba v Chicagu?“*.

Můžeme postupovat následovně:

Je potřeba si uvědomit, že počet ladičů pián není žádné náhodné číslo. Počet opravdu existujících ladičů odpovídá potřebě, tj. počtu ladičů, kteří v Chicagu najdou uplatnění.

Odhad poptávky po ladičích pián lze provést na základě vhodného rozčlenění na tyto kroky:

- Jaký je počet obyvatel Chicaga?
- Kolik procent domácností vlastní klavír?
- Jak často se musí ladit piáno?
- Kolik času je potřeba k naladění jednoho piána?
- Jaká je roční pracovní doba ladičů v Chicagu?
- Jaká je denní pracovní doba jednoho ladiče?

Postupně odhadujeme hodnoty v jednotlivých krocích. Vynásobíme-li počet pián a počet ladění piána časem, který je potřebný k naladění piána, obdržíme roční pracovní dobu pro ladiče v Chicagu. Nyní musíme získaný čas vydělit odhadovanou denní pracovní dobou jednoho ladiče, abychom získali požadovanou odpověď.

Z uvedeného příkladu by mělo být zřejmé, že řešením daného problému rozumíme spíše dovednost správně klást otázky. Návod na řešení problému si každý může najít samostatně, což ovšem vyžaduje kreativitu myšlení.

Pokud si dokážeme některé hodnoty odhadnout sami, nejsme odkázání na odhady druhých ani na hodnoty uvedené v literatuře. Nemusíme je tedy hledat a nejsme ochromeni neschopností nalézt je ve stále větších a větších souborech informací a přeplněných knihovnách.

Řešit můžeme i následující úlohu:

Problém žravosti žraloka: Ptáme se, kolik ryb musí denně sežrat žralok.

Žraloci jsou považování všeobecně za žravé a brutální zabijáky. Zajímavá je otázka, kolik toho vlastně žralok denně sežere, kterou málokdo dokáže zodpovědět. Odhady jsou různé - od jednoho kilogramů až po několik tun ryb za den.

Výchozím bodem pro řešení problému je fyziologická zvláštnost žraloků. Aby mohl žralok vůbec dýchat, musí se stále pohybovat. Bude zásobován kyslíkem pouze tehdy, pokud se dostane dostatečné množství vody díky jeho pohybu k žábrám. Musí dokonce plavat i ve spánku. Při neustálém plavání koná žralok práci při překonávání odporu vody. Zde se nabízí vysvětlení, že toto je příčina jeho značné chuti k jídlu. Jsou tedy žraloci tak žraví, protože se musí stále pohybovat?

Předpokládejme, že plavání je hlavní činností žraloka, při níž spotřebovává většinu energie. Pak můžeme vypočítat práci, kterou během dne vykoná při překonávání odporu vody a z této hodnoty určíme potřebné množství potravy.

Teplo odevzdané do okolní vody žralokem není při této bilanci potřeba uvažovat. Žraloci jsou chladnokrevní a nemusí si udržovat tělesnou teplotu na určité hodnotě. Žralok odevzdá do vody teplo vzniklé neschopností svalů zcela přeměnit chemickou energii (skrytou v potravě) na mechanickou. Toto zohledníme užitím koeficientu účinnosti menšího než 1.

Pro konkrétní výpočet zvolme např. žraloka modrého, jehož délka je 3 - 4 m a průměr 50 cm. Rychlost jeho pohybu je asi 0,5 ms^{-1}. Žralok modrý patří mezi rychlé plavce. Nejdelší pozorovaná vzdálenost, kterou žralok za den urazí, je asi 55 km.

Očekávali bychom, že žralok pohybující se ve vodě způsobuje turbulentní proudění. Odporová síla je v tomto případě dána vztahem

$$F = \tfrac{1}{2} C\rho S v^2 , \qquad (1)$$

kde C je součinitel odporu (stanovuje se empiricky), ρ hustota prostředí, S obsah příčného průřezu obtékaného objektu a v je velikost relativní rychlosti mezi objektem a vodou. Turbulentní proudění se ověří pomocí Reynoldsova čísla

$$\mathrm{Re} = \frac{l\rho v}{\eta} , \qquad (2)$$

kde l je délka objektu (žraloka), v rychlost, ρ hustota tekutiny, η dynamická viskozita (10^{-3} N·s·m^{-2} pro vodu). Po dosazení Re = $1{,}5\cdot 10^6$. Turbulence začínají vznikat pro hodnoty Re $\approx 5\cdot 10^5$. Odporovou sílu tedy můžeme popsat vztahem (1).

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu práce, kterou musí žralok vykonat při pohybu vodou. Určíme ji ze vztahu $W = F \cdot s = F \cdot v \cdot t$, pro konstantní rychlost. Nyní dosaďme z (1) a dostaneme

$$W = \tfrac{1}{2} C S \rho v^3 t \,. \qquad (3)$$

Předpokládejme, že hodnota C je asi 0,05, což odpovídá dokonalé stavbě těla žraloka. Dále určíme plochu $S = \pi r^2 = 0{,}2\ \mathrm{m}^2$ a t = 24 h, protože nás zajímá energie spotřebovaná během jednoho dne. Za ρ dosadíme hustotu mořské vody, která je přibližně 1 300 kg·m^{-3}. Po dosazení obdržíme hodnotu W = 74 kJ. To je energie spotřebovaná za jeden den při překonávání odporu vody.

Jak jsme již uvedli, svaly žraloka mají účinnost menší než 1. Bylo vypozorováno, že účinnost je přibližně 25 %. To znamená, že organismus žraloka potřebuje denně přijmout 4·74 kJ $\approx$ 300 kJ v potravě, aby byl schopen plavat nepřetržitě 24 hodin. Odhadli jsme tedy, že žralok denně spotřebuje plaváním energii 300 kJ.

Otázka ovšem byla, jaké množství ryb musí denně sežrat. Vyjdeme z toho, že látková výměna u žraloka je stejně účinná jako u člověka. Podíváme-li se do kuchařky, najdeme v ní, že 100 g ryby má energetický obsah asi 230 kJ. Žralok tedy musí denně sežrat 130 g ryby.

Vypadá to, že tento výsledek je absurdní. Nečekali bychom, že žralok vystačí s tak malým množstvím potravy. Srovnáme-li to s člověkem, který denně potřebuje 10 700 kJ, při tomto množství energie by zemřel hlady. Očekávali bychom, že jsme se přepočítali nebo, že jsou špatné některé z našich předpokladů. Ačkoli je to ohromující, vypočítané hodnoty jsou řádově správné.

V literatuře lze najít následující tvrzení: „O žralocích nelze mluvit jako o žravých dravcích. Pěkným příkladem je žralok modrý. Tento žralok o délce dva metry a hmotnosti 50 kg příjme za rok asi 100 kg potravy, což je v přepočtu asi 270 g za den.“

Přístup k úloze jako k Fermimu problému nám v zajímavém kontextu ukázal, jak lze biologická fakta analyzovat pomocí fyzikálních zákonů a získat řádově správné kvantitativní odhady. Shoda vypočtených hodnot se skutečností bude ještě výraznější, jestliže si uvědomíme, že plavání není jedinou činností organismu žraloka, ale že energie je spotřebována také pro jiné fyziologické funkce.

Soutěž Fermiho úlohy

Soutěž byla zahájena v říjnu 2006, kdy bylo vyhlášeno 1. kolo I. ročníku Fermiho úloh. Pro první kolo bylo zadáno 7 úloh. Byly to následující úlohy: Kolik elektronů projde průřezem vlákna žárovky během jednoho dne, bude-li žárovka svítit celých 24 hodin? Jakou dobu v sekundách by potřeboval zvuk signalizující výbuch sopky, aby oběhl celou Zemi? Kolik zrnek rýže snědli obyvatelé Prahy za posledních 10 let? Nová hvězda byla objevena ve vzdálenosti 4 světelných let od Země. Jak velký je objem koule o poloměru 4 světelných let (v km^3)? Kolik atomů obsahuje krystal chloridu sodného o hraně 2 cm? Kolik kilogramů oxidu uhličitého vznikne spálením 1 tuny surové ropy? Jak velká hromada tisícikorun by vznikla, kdyby vám někdo zaplatil za každý atom železa ve vašem těle 10 Kč?

Současně byla zveřejněna kritéria pro hodnocení úloh:

- Přesnost výsledného odhadu.
- Počet doplňujících kroků k vyřešení úlohy - doplňkové otázky a hledání odpovědí na ně.

- Originalita.
- Způsob prezentace výsledků řešení.

Soutěž byla rozdělena na dvě kategorie, a to pro žáky základních škol a žáky škol středních. Soutěžícími se mohli stát jednotlivci nebo soutěžící kolektivy (hodnoceno zvlášť). Termín pro zaslání výsledků byl pevně stanoven. V prvních kolech mohli žáci používat dostupných informačních zdrojů. Soutěže se tedy mohl zúčastnit každý žák ve třídě, nebo několik skupin žáků ze třídy. Správná řešení, vyhodnocení řešitelé a nejoriginálnější postupy byly postupně zveřejňovány na internetových stránkách soutěže (http://isouteze.upol.cz/fermi/index.html). Soutěžící měli řešit všechny zveřejněné úlohy daného kola.

Příklad řešení úlohy 3 (neupraveno):

a) Údaje najdu na webu Českého statistického úřadu, užiji roky 1996-2005 (Ze statistického hlediska odpovídá rok 1996 přibližně roku 2006, protože spotřeba rýže se musela zvýšit díky neúrodě brambor). b) výpočet celkové spotřeby v kilech určím sečtením deseti hodnot- průměrná roční spotřeba rýže v kilogramech na jednoho občana na rok vynásobením počtem obyvatel Prahy.

rok	Spotřeba v kg	Počet obyvatel	Součin
1996	5,0	1204953	6024756
1997	4,2	1200455	5041911
1998	4,5	1193270	5369715
1999	4,3	1186855	5103476,5
2000	4,6	1181126	5433179,6
2001	4,4	1160118	5104519,2
2002	4,8	1161938	5577302,4
2003	5,0	1165581	5827905
2004	4,6	1170571	5384626,6
2005	4,0	1176261	4705044
			53572444,3

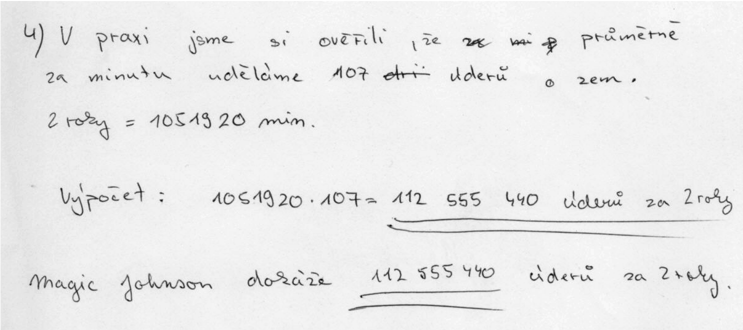
c) měřením kombinovaném s odhadem určím, že v jednom kilogramu rýže je cca 15000 zrnek rýže.

d) počet zrnek spotřebovaných za posledních 10 let tedy určím vynásobením výsledné hodnoty z bodu b) hodnotou z bodu c). Výsledná hodnota je **803.586.664.500** zrnek rýže (tečky uvedeny pro přehlednost).

Příklad řešení úlohy č. 4 z finále:

Dále je uveden příklad řešení úlohy Finále č. 4: Magic Johnson dokáže driblovat nonstop jak dlouho si zamane. Dribluje-li bez přestání po dobu 2 let, kolikrát udeří míčem o zem?

Finále soutěže probíhá v laboratoři, soutěžící mají k dispozici jen Tabulky a nezbytné pomůcky pro případnou realizaci pokusu či odhadu měřených veličin.



4) V praxi jsme si ověřili, že ~~za~~ ~~mi~~ průměrně za minutu uděláme 107 ~~dri~~ úderů o zem.

2 roky = 1051920 min.

Výpočet: 1051920 · 107 = 112 555 440 úderů za 2 roky

Magic Johnson dokáže 112 555 440 úderů za 2 roky.

Obr. 1 Řešení úloh Finále

Příklad řešení jedné z úloh korespondenčního kola z roku 2010:

Úloha 1: Kolik mravenců žije na Zemi a je jejich hmotnost vyšší než hmotnost všech obyvatel na Zemi?
Řešení:
Na začátku zopakuji pro nás důležité informace o Zemi a o mravencích:

Mravenec lesní **Hmotnost:** ± 3 mg **Velikost (délka):** 9-11 mm **Mraveniště monogynní(1 královna):**< 500000 mravenců	**Mraveniště polygynní (více královen):**>500000 mravenců **Země** **Počet obyvatel(17.2.2011, 16:05):** 6904694670 **Prům. hmotnost člověka:** 72 – 83 kg **Rozloha souše:** 148939063 km^2

Nyní si začneme pokládat otázky.
Kde na zemi žijí mravenci?
Mravenci jsou velmi přizpůsobiví, a proto žijí téměř na celém světě. Nežijí pouze na Antarktidě, v Grónsku, naIslandu a v části Polynésie.
Jak je mravenec velký?
Jelikož se každý druh a poddruh mravence liší, vezmeme typového mravence, jenž má průměrné proporce. Bude to mravenec lesní *(formicarufa)*. Jak jsem v počátečních informacích zmínil, mají hmotnost okolo 3 mg a délku okolo 10 mm (± 1,5 mm). My budeme počítat s hodnotami pro hmotnost – 3 mg a pro délku 11 mm. V těchto hodnotách jsou započteny rozdíly jednotlivých druhů mravenců. (např. největší mravenci dosahují až 3 cm a nejmenší okolo 1,5 mm – z toho vyplývá, že mravenec lesní je někde uprostřed, protože menších druhů je více)
Kolik mravenců je v 1 kolonii (mraveništi)?
Na začátku jsem se zmínil o dvou typech mravenišť. Oba dva se shodují v hodnotě 500000, a proto ji použijeme jako hodnotu počtu mravenců v kolonii.
Jak velká je plocha, na které mravenci žijí?
V bodě 1 jsem zmínil oblasti, ve kterých nenajdete mravence. Jsou to Antarktida (rozloha 14000000 km^2), Grónsko (rozloha 2166086 km^2), Island (rozloha 103001 km^2) a část Polynésie (všechny ostrovy kromě Nového Zélandu, Havaje a Melanésie – rozloha 27232 km^2). Celková plocha se proto vypočítá takto:

$$S_{mravenci}=S_{souše}-(S_{Antarktida}+S_{Grónsko}+S_{Island}+S_{Polynésie})$$
$$S_{mravenci}=148939063-(14000000+2166086+103001+27232)$$

$S_{mravenci}$=132642744 km^2
Jak velké území připadá na jednoho mravence a na jednu kolonii?
Budeme předpokládat, že na jednoho mravence připadá plocha ve tvaru čtverce o délce strany 2,2 cm (dvojnásobek délky mravence). Tím pádem bude plocha:

$S=a^2$
$S=2,2^2$
$S=4,84\ cm^2$

Plocha jednoho celého mraveniště by pak byla:

$S_{mraveniště}$={počet jedinců}*S
$S_{mraveniště}$=500000*4,84
$S_{mraveniště}$=2420000 cm^2=2,42 a

Pomocí zjištěných dat dokážeme určit přibližný počet mravenců na planetě Zemi:
S=4,84 cm^2=4,84*10^{-10} km^2
$S_{mravenci}$=132642744 km^2
{počet mravenců}=$S_{mravenci}$/S
{počet mravenců}=132642744/4,84*10^{-10}
{počet mravenců}=2,740552562*10^{17}=274055256200000000

Nyní si odpovíme na druhou polovinu zadání a to, jestli jsou všichni mravenci těžší než lidé.
Jak těžcí jsou všichni lidé?
Tuto hodnotu zjistíme tak, že uděláme součin počtu lidí a průměrné hmotnosti. Průměrná hmotnost se pohybuje mezi 72-83 kg. My si proto uděláme medián této řady čísel. Vyjde hodnota 77,5 (m_1), se kterou budeme dále počítat. Celkovou hmotnost tedy vypočteme:

$m_{obyvatelé}$=m*{počet obyvatel}
$m_{obyvatelé}$=77,5*6904694670
$m_{obyvatelé}$=535113836925 kg

Jak těžcí jsou všichni mravenci?
Z předchozích výpočtů víme, že mravenců je 2,740552562*10^{17}. Hmotnost mravence je 3*10^{-6} kg (m_2). Z toho vyvodíme vztah:

$m_{mravenci}$={počet mravenců}*m2
$m_{mravenci}$=(2,740552562*10^{17})*(3*10^{-6})
$m_{mravenci}$=8,221657689*10^{11}=822165768600 kg

Nyní můžeme hmotnosti porovnat:
$m_{obyvatelé}$= 535113836925
$m_{mravenci}$= 822165768600
A proto platí: $m_{mravenci}$(822165768600)>$m_{obyvatelé}$(535113836925) a to o 287051931675 kg.

Odpověď:
Na naší planetě žije pravděpodobně 274055256200000000 (274 biliard) mravenců. Jejich hmotnost by poté byla větší než hmotnost všech obyvatel.

Zdroje: biolib.cz, wikipedia.org, worldsmeter.com,

V posledních ročnících jsme omezili počet úloh zadávaných během korespondenčních kol na čtyři, maximálně pět úloh. Finále soutěže probíhá nyní již tradičně v den konání Přírodovědného jarmarku. Vyhlášení vítězů má slavnostní charakter, ceny nejúspěšnějším řešitelům předává děkan Přírodovědecké fakulty. Soutěžící také obdrží hodnotné ceny.

Obr. 2 Finále soutěže 2011

Obr. 3 Předávání cen

Aktuální ročník najdete na adrese: http://isouteze.upol.cz/fermi/aktroc.html

Závěr

Fermiho problémy představují obohacení výuky fyziky a přispívají k tomu, aby se výuka trochu změnila, „okořenila“, aby se rozvíjely schopnosti žáků strukturovat problémy, zredukovat komplexnost a odhadovat hodnoty. Úlohy tohoto typu se většinou nedrží osnov a je pak nutné, aby si žáci připomenuli a aktivovali již dříve probrané učivo.

Při kladení Fermiho otázek ve vyučování se nemusíme omezit na fyzikální tématiku. Fermiho problémy nabízejí možnost procvičovat fyzikální zákonitosti v zajímavých souvislostech s jinými předměty např. biologii, zeměpisem atd. Tímto způsobem mohou být do výuky fyziky začleněny mezipředmětové vztahy.

Pouhé memorování poznatků žáky je učiteli méně ceněno než rozvíjení logického myšlení, které je nezbytné při řešení takovýchto úloh. Čím dříve budou žáci seznámeni s takovýmto způsobem přemýšlení v přírodních vědách, tím to bude lepší.

Literatura a další zdroje

[1] HOLUBOVÁ, R.: The innovation and recruitment of physics students and teachers. *JPTEO* Vol. 4, Nb.3, Summer 2007. ISSN 1559-3053.

[2] HOLUBOVÁ, R.: The Innovation of Physics Teacher Training at the Palacky University. *The International Journal of Learning*. ISSN 1447-9494.Vol.14 (2), pp.41-46.

[3] HOLUBOVÁ, R.: *Mladý vynálezce a Fermiho úlohy*. In: Nové metody propagace přírodních věd mezi mládeží. Sborník z konference, str. 41. ISBN 80-244-1524-0.

[4] http://isouteze.upol.cz/fermi/index.html