MATEMATICKÉ ÚLOHY

pro druhý stupeň základního vzdělávání

Milan Hejný, Darina Jirotková a kol.

Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007

TIMSS 2007

Ústav pro informace ve vzdělávání 2010

Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání

Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007

Milan Hejný, Darina Jirotková a kol.

Ústav pro informace ve vzdělávání 2010

Tato publikace byla vydána jako plánovaný výstup projektu Kompetence I, který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

ISBN 978-80-211-0612-3

OBSAH

Předmluva ... 5

Úvod ... 7

Koncepce výzkumu TIMSS ... 7

Výsledky českých žáků osmých ročníků v matematice ... 8

Pojetí sbírky úloh ... 10

1 ČÍSLA ... 13

1.1 Přirozená čísla ... 13

1.2 Zlomky a desetinná čísla ... 18

1.3 Celá čísla ... 25

1.4 Poměr, úměrnost a procenta ... 29

2 ALGEBRA ... 37

2.1 Písmena místo čísel (parametry) ... 37

2.2 Řady ... 41

2.3 Výrazy ... 52

2.4 Rovnice, vzorce ... 58

3 GEOMETRIE ... 63

3.1 Geometrické tvary ... 63

3.2 Geometrické měření ... 72

3.3 Poloha a změna polohy ... 78

4 DATA ... 87

4.1 Sběr, organizace a zpracování dat ... 87

4.2 Interpretace dat ... 94

4.3 Kombinatorika ... 99

4.4 Pravděpodobnost a statistika ... 104

AUTOŘI A SPOLUPRACOVNÍCI

Koncepci publikace a úvodní texty vytvořili Milan Hejný, Darina Jirotková a Dominik Dvořák, autory úloh jsou Jana Hanušová, Milan Hejný, Miroslav Hricz, Darina Jirotková, Jaroslava Kloboučková, Lukáš Umáčený.
Výsledky kontrolovala Anna Sukniak.
Většinu obrázků zpracoval Pavel Hejný. Podklady pro grafy vytvořili pracovníci Ústavu pro informace ve vzdělávání pod vedením Jana Hučína.
Úlohy recenzovaly Eva Lesáková a Eva Řídká.
Matematickou část projektu koordinovaly Eva Šafránková a Marie Almerová.
Při tvorbě publikace bylo použito výsledků výzkumu uskutečněného v rámci Výzkumného záměru MSM 002 132 0862.

PŘEDMLUVA

Většina vyspělých zemí má národní systémy pravidelného ověřování znalostí a dovedností žáků počátečních stupňů vzdělávání. Česká republika však dosud takové zjišťování soustavně neprovádí. Co čeští žáci umí, jak si jako celek stojí ve srovnání se světem a jak se jejich znalosti mění v čase, se proto objektivně dozvídáme především z mezinárodních výzkumů výsledků vzdělávání. V oblasti matematiky a přírodních věd jsou to šetření TIMSS a PISA. Tato publikace a dvě další, jež vycházejí současně s ní, se opírají o výzkum TIMSS, který proběhl v roce 2007. Podrobněji jeho koncepci a zjištění představíme v první části knihy. Již v začátku však zdůrazníme skutečnost, která je dnes odborné i širší veřejnosti známa: **výsledky našich žáků se v posledních letech nevyvíjely příznivě.** V různých oblastech sledovaných mezinárodními výzkumy pozorujeme buď pokles výkonu českých žáků, nebo stagnaci.

Pokud jde o matematiku a přírodní vědy, v devadesátých letech minulého století, kdy se Česká republika začala zapojovat do mezinárodních srovnávacích šetření, se čeští žáci ve světovém srovnání umisťovali na předních příčkách. Díky tomu není absolutní úroveň znalostí a dovedností českých žáků ještě vyloženě špatná. Přesto nás vývoj výsledků našich žáků nemůže nechat lhostejnými. Proto také vznikl projekt Kompetence I. a publikace, jež jsou jedním z jeho výstupů.

Celý projekt Kompetence I., podpořený Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky, si především klade za cíl prostřednictvím pokračující účasti v mezinárodních šetřeních získat další informace o znalostech a dovednostech českých dětí a o jejich vývoji. Je však neméně důležité využívat velké množství informací, které přinášejí tyto projekty, pro zlepšení stavu českého školství. I když se v posledních letech jistě ve školství udělalo mnoho například pro to, aby se děti ve školách cítily lépe, je nezbytné znovu zaměřit pozornost na rozvíjení znalostí a dovedností našich žáků. Nejsme si jisti, zda právě v této oblasti přinesla kurikulární reforma dostatečné zlepšení.

Výsledky žáků samozřejmě nejsou jen odrazem práce školy. Je zde ve hře celá řada faktorů, které škola ovlivnit nemůže. Ale nepochybně to nejdůležitější, co škola může udělat pro lepší učení žáků, je zajímavé a kvalitní vyučování. Učitelé vědí, že **kvalita výuky do značné míry závisí na otázkách,** jež svým žákům kladou, **a na úlohách,** jež žáci společně s učitelem či samostatně řeší.

Proto se autoři tohoto projektu rozhodli nabídnout učitelům sbírky úloh a otázek, z nichž lze vybírat náměty při plánování vyučování. Úlohy jsou založeny na analýze slabin českých žáků, které se projevily v šetření TIMSS a které jsou podrobněji rozebrány v první části knihy. Nejde nám v žádném případě o pouhý trénink našich žáků na konkrétní úlohy, abychom v příštích mezinárodních šetřeních získali více bodů či se umístili na žebříčku o kousek výše. Snažili jsme se postihnout, kde testy naznačily obecnější nedostatky v obsahu a pojetí výuky v české škole, a navrhnout úlohy, jež mohou napomoci překonání těchto nedostatků. Předložené analýzy a náměty pro vyučování jsou samozřejmě jen velmi dílčí odpovědí na problémy, před nimiž v poslední době naše školství stojí. Současně žádný učitel nemůže do své výuky zařadit vše, co naše publikace přinášejí. A konečně – o tom, zda úloha něco žáky naučí, rozhoduje především to, jak s ní učitel pracuje. Přáli bychom si proto, aby učitelé využili naše sbírky jako malou nabídku pomoci v nesnadném úkolu vzdělávat žáky v matematice a přírodovědných předmětech.

Formu a obsah sbírek jsme se snažili konzultovat jak s odborníky, tak především s učiteli z praxe. Ohlasy od učitelů nás povzbudily a utvrdily v přesvědčení, že takový materiál může být pro jejich práci užitečný.

Všem, kteří umožnili vznik publikace a přispěli nám radou a pomocí, děkujeme.

ÚVOD

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Jde o projekt Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání (IEA). Výzkum TIMSS je zaměřen na vědomosti a dovednosti rozvíjené ve školní výuce. Zjišťují se pomocí písemných testů, jež obsahují úlohy z matematiky a přírodních věd. Protože všechny zúčastněné země používají stejné testy, jsou testové úlohy spíše průnikem národních osnov a v jednotlivých zemích nemusí odpovídat přesně tomu, co a kdy se ve škole skutečně probírá. Součástí výzkumu je i dotazníkové šetření mezi žáky, učiteli matematiky a přírodovědných předmětů a řediteli škol. Otázky se týkají např. postojů žáků, metod výuky, školního prostředí.
Výzkum je zaměřen na věkové kategorie devítiletých a třináctiletých žáků a na žáky v posledních ročnících středních škol. Probíhá od roku 1995 ve čtyřletých cyklech. Česká republika se do něj zapojila v letech 1995, 1999 a 2007. V roce 1995 byly testovány všechny věkové kategorie, v roce 1999 jen třináctiletí žáci, v roce 2007 pak devítiletí a třináctiletí žáci.
Do výzkumu TIMSS 2007 se zapojilo celkem 59 zemí z celého světa a dalších osm územně samosprávných celků.
V České republice se výzkumu v roce 2007 účastnili žáci 4. a 8. ročníku základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Celkem to bylo více než devět tisíc žáků z 291 škol a více než třináct set jejich učitelů.

KONCEPCE VÝZKUMU

Výsledky žáků jsou v matematice i přírodních vědách hodnoceny ze dvou pohledů označovaných jako *obsah* a *operace*. Obsah je vymezen učivem, jehož zvládnutí je testováno. Ve výzkumu TIMSS 2007 byly sledovány oblasti učiva uvedené v tabulce 1.

Tabulka 1: Oblasti učiva

Matematika		**Přírodní vědy**	
4. ročník	**8. ročník**	**4. ročník**	**8. ročník**
čísla	čísla	nauka o živé přírodě	biologie
geometrické tvary a měření	algebra	nauka o neživé přírodě	chemie
znázornění dat	geometrie	nauka o Zemi	fyzika
	data a pravděpodobnost		vědy o Zemi

Operace jsou vymezeny dovednostmi, které mají žáci při práci s učivem prokázat.
Dovednosti sledované ve výzkumu TIMSS 2007 byly následující:
– prokazování znalostí;
– používání znalostí (aplikace);
– uvažování.
Úlohy používané ve výzkumu TIMSS lze tedy třídit podle obsahové a operační složky. Další dělení úloh je podle typu odpovědi, a to na úlohy s výběrem odpovědi a na úlohy s otevřenou odpovědí. Po každém kole výzkumu je část úloh uvolněna (odtajněna), aby se s nimi mohla seznámit odborná veřejnost. Část úloh zůstává utajena pro použití v následujících kolech, což usnadňuje sledování vývoje výkonu žáků v čase. V tomto smyslu v následujících kapitolách mluvíme o úlohách uvolněných nebo neuvolněných.

PREZENTACE VÝSLEDKŮ

Výsledky zemí jsou v oficiálních publikacích TIMSS prezentovány dvěma způsoby. Prvním je prezentace pomocí *skóre (počtu bodů)*, jež vyjadřují úspěšnost žáků na škálách výsledků. Pro matematiku a pro přírodní vědy byly v obou ročnících vytvořeny jednak škály *celkové*, jednak škály *dílčí* pro

jednotlivé oblasti učiva a dovednosti. Škály byly vytvořeny tak, aby umožňovaly srovnávat výsledky žáků v průběhu času.
Základem druhého způsobu prezentace výsledků žáků jsou čtyři *vědomostní úrovně*. Každá úroveň je určena minimálním počtem bodů, jehož musí žák dosáhnout. Výsledky zemí jsou pak vyjádřeny procentuálním zastoupením jejich žáků na jednotlivých vědomostních úrovních. Podrobnější charakteristiku jednotlivých vědomostních úrovní i s příklady úloh lze nalézt v publikaci TOMÁŠEK, V. a kolektiv: *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?* Praha, ÚIV, 2008.
Výsledky popsané v předchozích odstavcích jsou získávány poměrně složitými statistickými metodami, což jim dává určitou obecnou platnost. Na druhou stranu se ukazuje, že pro nalezení konkrétních příčin neúspěchu žáků může být užitečnější použít relativně jednodušší informace, jako jsou třeba procenta žáků, kteří jednotlivé úlohy zvládli, kteří některou otázku vůbec nezkusili řešit nebo kteří volili typickou špatnou odpověď (distraktor). V následujících kapitolách pracujeme někdy i s daty, ve kterých není například zohledněna rozdílná obtížnost jednotlivých úloh. I tato data jsou dostupná a ve světě se s nimi pracuje.
Velmi nás zajímalo i to, které otázky byly pro české žáky relativně problémovější než pro většinu jejich vrstevníků v zemích, jež se výzkumu zúčastnily. Takové rozdíly mohou mít relativně banální příčiny – zpravidla to, že se dané učivo u nás probírá jindy než v zahraničí. Může to však signalizovat i závažnější rozdíly v obsahu a pojetí jednotlivých školních předmětů. Rozlišit to bude vyžadovat další diskusi, do níž se musí zapojit širší komunita učitelů a odborníků. Informace, které předkládáme v následující kapitole, jsou jen malým příspěvkem k těmto úvahám.

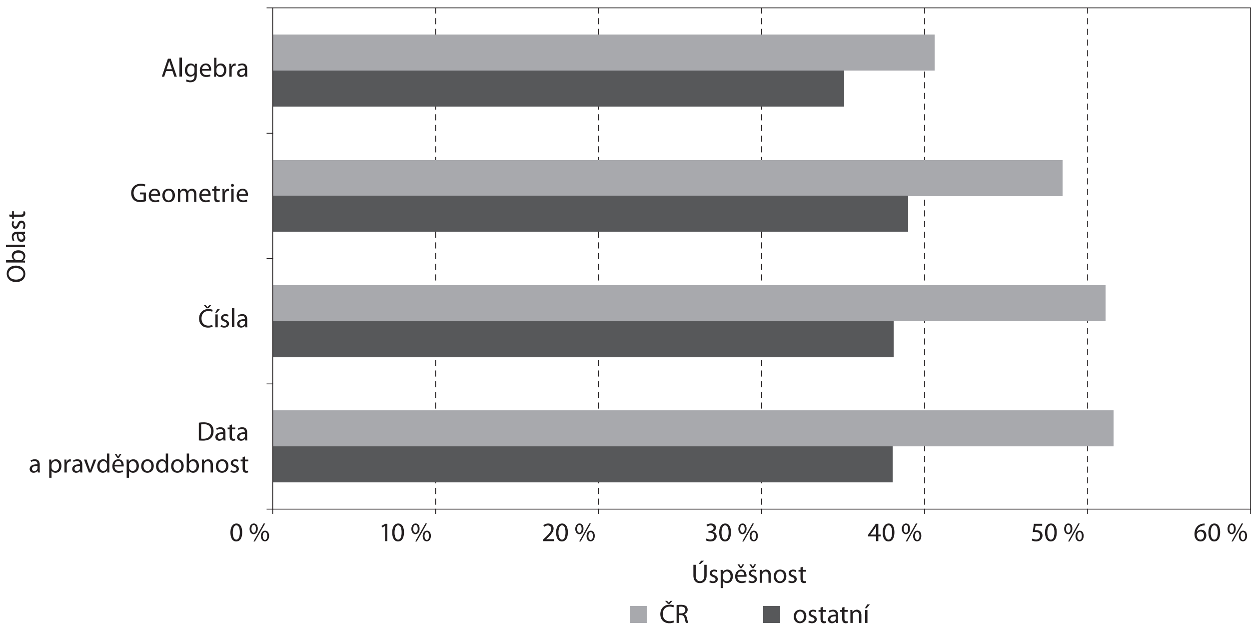
VÝSLEDKY ČESKÝCH ŽÁKŮ OSMÝCH ROČNÍKŮ V MATEMATICE

Jak bylo řečeno, výzkum TIMSS zjišťoval celkem třikrát – v letech 1995, 1999 a 2007 – matematické vědomosti a dovednosti českých žáků osmých tříd základní školy a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií (dále budeme pro jednoduchost používat označení žáci osmých tříd nebo osmáci). Oproti výborným výsledkům v šetření prováděném v roce 1995 se už v roce 1999 projevilo velké zhoršení – největší ze všech zúčastněných zemí. Usuzovalo se, že za poklesem výsledků stojí přechod od osmileté k devítileté školní docházce a s ním spojená změna kurikula. Zjednodušeně řečeno, část učiva, které v roce 1995 v době testování už bylo probráno, se v následujících letech přesunula do devátého ročníku a žáci se s ním seznamovali až po testování.
Výzkum TIMSS 2007 však ukázal, že i v následujících letech, kdy nedocházelo k zásadním zásahům do kurikula, zhoršování výsledků českých žáků pokračovalo. Výsledný pokles mezi lety 1995 a 2007 byl třetí největší ze všech evropských zemí a zemí OECD, jež se do výzkumu v obou šetřeních zapojily. (Ještě větší pokles zaznamenaly z uvedených zemí jen Švédsko a Bulharsko. Blíže opět viz Tomášek, V. a kol.: *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?* Praha, ÚIV, 2008.)
Analýza příčin klesajících výkonů, které podávají čeští žáci v osmém roce svého základního vzdělávání, samozřejmě musí vzít v úvahu i to, co se děje v průběhu celé jejich školní docházky. Žáci přicházejí na druhý stupeň nebo do víceletých gymnázií již s určitou úrovní vědomostí a dovednosti a také s určitými postoji ke škole a k matematice. Tyto znalosti a postoje pak představují východisko nebo limit pro další studium matematiky. Z mezinárodních šetření bohužel nemáme data o tom, co si z prvního stupně přinesli ti žáci, kteří byli v roce 2007 testováni jako třináctiletí a o jejichž matematické výsledky nám zde jde. Česká republika se totiž nezapojila do šetření, které probíhalo v roce 2003, a promeškali jsme tak cennou možnost sledovat jednu věkovou kohortu dětí v obou bodech jejich vzdělávací dráhy. Máme k dispozici jen data o žácích čtvrtých ročníků, kteří byli testováni souběžně s žáky osmých ročníků. Tato skupina nebyla od roku 1995 testována, a proto výsledky z roku 2007 zahrnují změnu za celých dvanáct let, do nichž spadá i prodloužení prvního stupně na pět let a s tím také změna kurikula. V roce 2007 v rámci zemí účastnících se výzkumu čeští čtvrťáci byli v matematice podprůměrní. Je to důsledek výrazného zhoršení, k němuž došlo ve srovnání s rokem 1995, kdy byli naši čtvrťáci nadprůměrní. Toto zhoršení je největší ze všech evropských zemí a zemí OECD, jež se výzkumu zúčastnily.

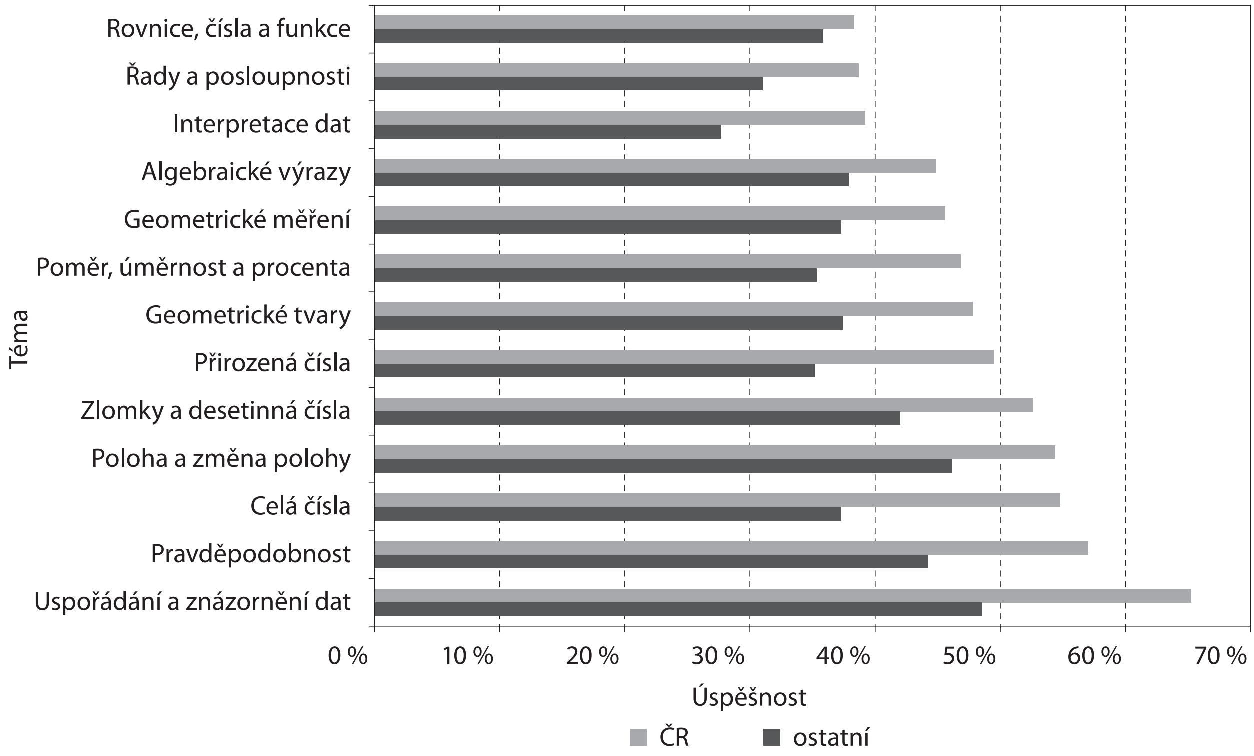
Podrobnější analýza dat o výsledcích žáků čtvrtých tříd spolu s porovnáváním kurikul matematiky používaných v různých zemích naznačuje, že čas získaný prodloužením prvního stupně o rok nebyl dostatečně efektivně využit. Žáci nepřicházejí na druhý stupeň s dostatečnými předpoklady pro nové požadavky, jež na ně matematická výuka ve vyšších ročnících klade. Nelze vyloučit, že právě zde leží jeden z hlavních faktorů ovlivňujících i výsledky třináctiletých žáků. (Podrobnější analýzy a podněty pro výuku matematiky na prvním stupni, jež se opírají o analýzu výsledků českých čtvrťáků v šetření TIMSS 2007, přináší souběžně vycházející publikace pro učitele primární školy.)

Podívejme se teď ale na výsledky žáků osmých ročníků. Při srovnání celkových výsledků se používají údaje získané procedurou IRT (item response theory), která bere v úvahu při hodnocení nejen počet úloh, v nichž žáci uspěli, ale i obtížnost jednotlivých úloh. Škála je navíc nastavena tak, aby umožnila korektní dlouhodobé sledování vývoje výsledků v čase. V tomto srovnání byly celkové výsledky našich žáků osmých ročníků průměrné, přičemž v úlohách z témat aritmetika (čísla), data a pravděpodobnost byli čeští žáci nadprůměrní, v geometrii průměrní a v algebře podprůměrní. Zhoršení oproti roku 1999, o němž jsme mluvili v úvodu, se projevilo hlavně v algebře a geometrii, přičemž čeští chlapci se na rozdíl od dívek zhoršili ve všech čtyřech oblastech učiva (Tomášek, V. a kol., 2008).

Jak jsme zmínili výše, pro analýzu na úrovni jednotlivých úloh nebo dílčích oblastí učiva se používají jednodušší data – procento žáků, kteří uspěli v dané úloze (obtížnost úlohy), případně průměrná obtížnost skupiny úloh z dané tematické podoblasti. Na nich jsou založeny i dále uváděné výsledky. Při porovnávání těchto dat s mezinárodním průměrem je však nutné mít na paměti, že tento průměr zahrnuje země s velmi rozdílnou úrovní rozvoje společnosti. Skutečnost, že jsme v tomto srovnání vesměs nadprůměrní, proto nemá velkou vypovídací hodnotu. Zajímavější je porovnávat různé oblasti učiva mezi sebou.



Obrázek 1 ukazuje úspěšnost českých žáků při řešení úloh z jednotlivých tematických oblastí, které jsou seřazeny podle obtížnosti pro české žáky. Jak je z grafu vidět, čeští žáci dosahují z tohoto pohledu lepších výsledků, než je průměr zemí, které se zúčastnily šetření TIMSS v roce 2007. Detailní rozbor však ukázal, že naši žáci „sbírali body“ zejména na úlohách lehkých z hlediska mezinárodně dosahované úspěšnosti, zatímco úlohy s vyšší obtížností častěji řešili nesprávně nebo je prostě přeskakovali. Základní tendence v obou typech dat jsou však stejné – je to především malá úspěšnost českých žáků v algebře, která je klíčová pro další studium nejen matematiky, ale také řady dalších přírodovědných nebo technických oborů.



Obrázek 2 ukazuje obtížnost dílčích témat pro české žáky opět ve srovnání s ostatními účastnickými zeměmi. (Oba grafy připravil Jan Hučín z Ústavu pro informace ve vzdělávání.)

V případě matematických výsledků žáků čtvrtého ročníku jsme v analogických datech nalezli výrazné signály o tom, že některá témata – konkrétně zlomky a desetinná čísla – v době testování nebyla dosud v českých školách probírána či zvládnuta, zatímco v ostatních zemích si s nimi žáci většinou poradili. Tímto rozdílem bylo možné vysvětlit nemalou část zhoršení výsledků ve srovnání s jinými účastnickými zeměmi. U výsledků žáků osmého ročníku se takové jednoznačné souvislosti neprojevují. Dokonce ani z hlediska operační úrovně nevykazovala data významné rozdíly. Museli jsme se zabývat často jednotlivými úlohami a hledat, které další znaky mají společné kromě tématu a operační úrovně. Výsledky analýzy jsou proto nejčastěji uvedeny přímo u jednotlivých sad úloh. Významné informace však byly obsaženy i ve zjištěních z průvodních dotazníků, jež ukazují na nedobrý vztah českých žáků k matematice jako oboru. Vzhledem k tomu, že již mladší žáci mluví často o nudě ve škole, je nutno uvažovat, zda i tady neleží hlubší kořeny našich narůstajících problémů v matematice.

POJETÍ SBÍRKY ÚLOH

Strategii, kterou jsme na základě těchto zjištění zvolili při koncipování publikace i při tvorbě úloh, lze proto charakterizovat takto: Dovednosti, jejichž nedostatečná úroveň vedla k neúspěchu mnoha českých žáků v některých úlohách šetření TIMSS, lze jednotlivými testovými úlohami měřit, nelze je však izolovanými úlohami rozvíjet a procvičovat. Proto jsme se snažili, kde to bylo možné, vytvářet gradované série úloh vedoucí žáka k rozvoji příslušné dovednosti nebo porozumění (např. k hlubšímu porozumění pojmu plochy nebo ke schopnosti zobecňovat). K úlohám jsou uvedena jednak řešení, jednak komentáře, v nichž bývá vysvětlena i souvislost zařazených úloh s těmi úlohami šetření TIMSS, které činily českým žákům obtíže.

Výsledkovou (komentářovou) část textu lze však snadno oddělit a každou stránku lze použít také jako test nebo zadání domácího úkolu. V mnoha případech však doporučujeme, aby byly úlohy řešeny ve třídě společně a aby se o nich vedla diskuse. Z mezinárodních šetření totiž víme, že čeští žáci dostávají ve škole málo příležitostí, aby svá řešení úloh obhajovali. Ve výzkumu TIMSS jsou pak pro žáky velmi obtížné úlohy, kde mají formulovat samostatně odpověď nebo své řešení vysvětlit či zdůvodnit (naši žáci je často prostě přeskakují).

Při výběru úloh do hodin matematiky navíc musíme mít na paměti i zjištění šetření TIMSS o nedobrém vztahu českých žáků k tomuto předmětu. Zařazením méně běžných úloh nebo sad úloh jsme chtěli pomoci učiteli udělat hodiny matematiky zajímavější a bojovat s nudou. Další z cest použitých k dosažení větší motivace žáků je zařazení úloh do kontextů, které mohou být blízké buď dívkám, anebo naopak chlapcům (jejichž výsledky se v poslední době výrazněji zhoršily).

Forma úloh umožňuje i to, aby je učitel zadával jednotlivým žákům jako prostředek individualizace výuky – ať už budou úlohy sloužit doplnění chybějících dovedností, nebo naopak budou představovat náročnější výzvu pro žáka, který už běžné učivo zvládl.

Podrobnosti o významu jednotlivých typů úloh a jejich souvislosti s úlohami ze šetření TIMSS jsou uváděny v komentářích. Kde to bylo možné, zařazovali jsme je přímo na příslušné strany. Ne vždy se to podařilo, a v takovém případě jsou komentáře na koncích příslušných kapitol.

V některých případech jsme zvolili i úlohy nebo skupiny úloh netradiční, které se na první pohled klasickým testovým úlohám rozhodně nepodobají. Stránky jsou však většinou řešeny jako nezávislé sady úloh, pokud se některá z nich učiteli nehodí, může ji obvykle přeskočit, aniž by mu to znemožnilo využít stránky následující.

1 ČÍSLA

1.1 PŘIROZENÁ ČÍSLA

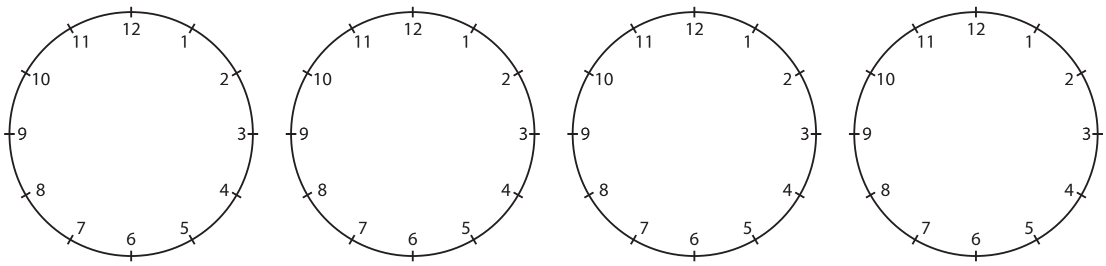
1.1.1 DĚLITELNOST (GEOMETRICKÉ MODELY)

1. Podlahu terasy o rozměrech 4,5 m a 7,5 m chce chalupář vydláždit stejnými čtvercovými dlaždicemi. Čím větší jsou dlaždice, jimiž se terasa vydláždí, tím nižší je cena celého dláždění. Na skladě jsou pouze čtvercové dlaždice o délce strany 10 cm, 12 cm, 15 cm, 18 cm nebo 20 cm.

a) Jaké největší dlaždice zakoupíme, jestliže se chceme vyhnout řezání dlaždic?
b) Kolik takových dlaždic bude potřeba obstarat?

2. Do ciferníku na obrázku budeme vepisovat pravidelné mnohoúhelníky. Například čtveřicí bodů (1, 4, 7, 10) je určen čtverec.

a) Podobným způsobem vyznač další čtverce a zapiš je do tabulky.



MNOHOÚHELNÍKY		**Počet řešení**
TROJÚHELNÍKY		
ČTVERCE	(1, 4, 7, 10)	

b) Podobně najdi všechny rovnostranné trojúhelníky a zapiš je do tabulky.
c) Podobně najdi další pravidelné mnohoúhelníky a zapiš je do tabulky.
Najdi vždy všechna řešení.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1a) 15 cm (15 je největší z nabídnutých dělitelů, který je společným dělitelem čísel 450 a 750);
1b) 1 500 ks.
2. Po obvodu ciferníku je 12 značek, všechny dělitele čísla 12 jsou: D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}, mnohoúhelník nemůže mít jeden nebo dva vrcholy, tedy je možné vepsat pravidelný troj-, čtyř-, šesti- a dvanáctiúhelník. Úplné řešení je v tabulce.

MNOHOÚHELNÍKY		**Počet řešení**
TROJÚHELNÍKY	(1, 5, 9), (2, 6, 10), (3, 7, 11), (4, 8, 12)	4
ČTVERCE	(1, 4, 7, 10), (2, 5, 8, 11), (3, 6, 9, 12)	3
ŠESTIÚHELNÍKY	(1, 3, 5, 7, 9, 11), (2, 4, 6, 8, 10, 12)	2
DVANÁCTIÚHELNÍK	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)	1

1.1.2 DĚLITELNOST (ARITMETICKÉ MODELY)

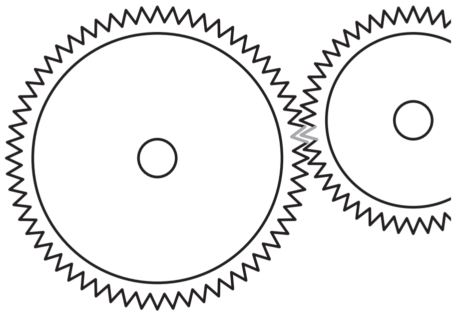
1. **V útvaru je méně než 300 vojáků. Když se postaví do pětistupu, zbude jeden voják, když do sedmistupu, také zbude jeden voják, a když do osmistupu, také zbude jeden voják. Kolik vojáků je v útvaru?**

2. **Čtyři tramvaje vyjely ráno v 5:00 společně z konečné stanice. Linka A jezdí v intervalu 15 minut, linka B v intervalu 6 minut, linka C v intervalu 20 minut a linka D v intervalu 8 minut.**

   a) V kolik hodin vyjedou z konečné opět všechny čtyři linky společně?
   b) Kolikrát za den (od 5:00 do 23:00) tramvaje čtyř linek vyjíždí společně z konečné?

3. **Dne 1. ledna 2007 bylo pondělí. Ve kterých letech v období od r. 2000 do r. 2030 vyšlo nebo vyjde 1. ledna opět na pondělí? Rok 2008 byl přestupný.**

4. **V ozubeném soukolí má velké kolo 60 zubů a jeden zářez je šedý. Druhé, menší kolo má jeden zub šedý. Ve výchozí pozici zapadá šedý zub do šedého zářezu. Stejná situace nastane nejdříve po pěti otáčkách malého kola a a) po jedné; b) po dvou; c) po třech; d) po čtyřech otáčkách velkého kola. Kolik zubů má malé kolo?**



5. **Novákovi staví pletivový plot kolem zahrady tvaru obdélníka o rozměrech 52 m a 68 m. Vzdálenost sousedních tyčí musí být stejná. Pro stavbu plotu bude potřeba minimálně**

   A) 60 tyčí B) 120 tyčí C) 64 tyčí D) 88 tyčí

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. 281 vojáků.
2a) za 120 minut (nejmenší společný násobek čísel 6, 8, 15, 20 je 120);
2b) v 5:00, 7:00, 9:00, 11:00, 13:00, 15:00, 17:00, 19:00, 21:00, 23:00 – desetkrát.
3a) v letech 2001, 2018, 2024, 2029.
4a) 12;
4b) 24;
4c) 36;
4d) 48 zubů.
5A) 60 tyčí.

Pohyblivé soukolí lze najít na:
http://translate.google.cz/translate?hl=cs&langpair=en|cs&u=http://en.wikipedia.org/wiki/Gear

KOMENTÁŘ:

1. Kdyby při uspořádání do pěti-, sedmi- i osmistupu žádný voják nezbyl, pak nejmenší počet vojáků je $5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$. Připočteme jednoho, který přebývá, a máme jich 281.
2. K pochopení situace přispívá, když žáci napíšou jízdní řád všech 4 linek.
3. Situace je opět popsatelná harmonogramem, ale tentokrát je pravidelnost narušena přestupnými roky.

1.1.3 DESÍTKOVÁ SOUSTAVA

1. Je zapsána řada čísel 1, 2, 3, …, 100. Kolikrát je v zápisu použita číslice a) 1; b) 0?

c) Kolik číslic je v zápisu?

2. Doplň správně do následujících vět čísla: 8, 40, 100, 400, 1 001, 385 000.

Vzor: Sousední vesnice má asi ...400... obyvatel.
a) Měsíc je od Země vzdálen přibližně ……. kilometrů.
b) V některých krabičkách bývá ……. trojúhelníkových sýrů.
c) V pohádce o Alí Babovi z knížky Pohádek ……. noci vystupuje ……. loupežníků.
d) Letos se nám na jabloňce před domem urodilo už asi ……. jablíček.

3. V tabulce je pomocí hvězdiček znázorněno číslo 10 359.

a) Pomocí hvězdiček znázorni 7 062, 204 680, 83 006.

	statisíce	desetitisíce	tisíce	stovky	desítky	jednotky
10 359		*		* * *	* * * * *	* * * * * * * * *
7 062						
204 680						
83 006						

b) Jaká čísla je možno znázornit v dané tabulce pomocí 2 hvězdiček? Najdi všechny možnosti.

4. Z číslic 0, 2, 3, 4 a 7 utvoř a) nejmenší trojciferné číslo; b) největší pěticiferné číslo tak, aby se v zápisu žádná číslice neopakovala.

5. Z číslic 2, 3, 5, 8 utvoř dvě dvojciferná čísla tak, aby jejich rozdíl byl a) co největší, b) co nejmenší.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1a) 21; **1b)** 11; **1c)** 192.
2a) 385 000; **2b)** 8; **2c)** 1001; 40; **2d)** 100.
3a)

	statisíce	desetitisíce	tisíce	stovky	desítky	jednotky
10 359		*		***	*****	***** ****
7 062			***** **		***** *	**
204 680	**		****	***** *	***** ***	
83 006		***** ***	***			***** *

3b) Celkem 21: šest, když jsou obě hvězdičky v témže okénku: 200 000, 20 000, 2 000, 200, 20 a 2, patnáct, když je každá v jiném okénku: 110 000, 101 000, 100 100, 100 010, 100 001, 11 000, 10 100, 10 010, 10 001, 1 100, 1010, 1 001, 110, 101 a 11.
4a) 203; **4b)** 74 320.
5a) 85 – 23 = 62; **5b)** 35 – 28 = 7.

1.1.4 ALGEBROGRAMY

1. Vyřeš algebrogramy:

a) $B + B + B + B = 15 + B$ b) $XX = 20 + X$ c) $YY + Y = 48$
d) $XY + X = 56$ e) $ST + S = 83$ f) $AB + B = BA$

2. Vyřeš algebrogramy:

a) $(R + R + R) + (R + R + R + R) = 28$ b) $10 \cdot T + 10 \cdot U = 50$
c) $A \cdot B = 16$ d) $J \cdot J \cdot H \cdot H = 36$ e) $P \cdot P + P = 56$
f) $R + R \cdot R \cdot R = 34$ g) $T + T \cdot T - T = 36$

3. Vyřeš:

a) $A^2 = BA$ b) $A^3 = BCA$ c) $A^3 = BCB$ d) $A^5 = BA$

4. Vyřeš:

a) $AA^2 = ABA$ b) $AA^2 = BCB$ c) $AA^2 = BBCC$

5. Vyřeš:

a) $AB^2 = ACC$ b) $AB^2 = CCB$ c) $AB^2 = CAB$ d) $AB^2 = BCB$

6. Místo hvězdiček doplň u obou násobení správné číslice:

a)
$$\begin{array}{rrr} & 7 & * \\ \cdot & & 3 \\ \hline * & * & 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrr} & & * & 4 \\ & \cdot & * & 5 \\ \hline & 3 & 2 & * \\ 1 & * & 2 & \\ \hline * & * & * & * \end{array}$$

✂ ---------------------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------------------- ✂

VÝSLEDKY:

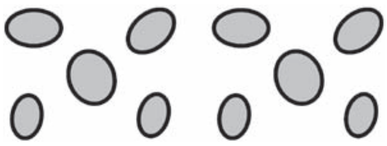
1a) $B = 5$; **1b)** $X = 2$; **1c)** $Y = 4$; **1d)** $X = 5$ a $Y = 1$; **1e)** $S = 7$ a $T = 6$; **1f)** $A = 8$ a $B = 9$.
2a) $R = 4$;
2b) šest řešení, v nichž je T jedna z číslic 0, 1, 2, 3, 4 nebo 5;
2c) dvě řešení, A může být 2 nebo 8;
2d) čtyři řešení, v nichž je J jedna z číslic 1, 2, 3 nebo 6;
2e) $P = 7$;
2f) nemá řešení, takové R neexistuje;
2g) $T = 6$.
3a) $A = 5$ a $A = 6$; **3b)** $A = 5$; **3c)** $A = 7$; **3d)** $A = 2$.
4a) $A = 1$; **4b)** $A = 2$; **4c)** $A = 8$.
5a) $AB = 12$; **5b)** $AB = 15$; **5c)** $AB = 25$; **5d)** $AB = 26$.
6a) $74 \cdot 3 = 222$; **6b)** $64 \cdot 35 = 2\,240$.

KOMENTÁŘ:

Algebrogramy nejsou součástí osnov, ale jsou účinným diagnostickým i výukovým nástrojem porozumění aritmetice. Zatímco u algebrogramů je přiřazení číslic a písmen prosté (různá písmena nelze nahradit stejnou číslicí), v úlohách s hvězdičkami jsou označena jenom ta místa, kde se číslice doplňuje. Tyto úlohy je třeba pečlivě vybírat, mohou být různě obtížné nebo jejich řešení může dlouho trvat. Začínáme s úlohami, které mají jedno řešení, později zařadíme úlohy s více řešeními i bez řešení. Učíme, že „Vyřeš" znamená „Najdi všechna řešení".

1.1.5 HRA NIM

1. **Na stole leželo 10 kamenů. Aleš a Blanka odebírali střídavě 1 nebo 2 kameny. Kdo vzal poslední kámen, vyhrál. Poraď Alešovi, který začíná, kolik kamenů má vzít, aby mohl vyhrát. Zdůvodni.**



2. **Ve hře, která je zapsána schématem níže, bylo na kopě 12 kamenů. V prvním kroku Aleš odebral 2 kameny, ve druhém Blanka odebrala také 2 kameny atd. Po třetím kroku Aleše zůstaly na kopě 3 kameny a Blanka se vzdala. Mohla Blanka v některém kroku zahrát lépe?**

$$12 \xrightarrow[A]{2} 10 \xrightarrow[B]{2} 8 \xrightarrow[A]{2} 6 \xrightarrow[B]{1} 5 \xrightarrow[A]{2} 3 \xrightarrow[B]{?}$$

3. **Napiš návod, jak vyhrát, když je na kopě 100 kamenů.**

4. **Aleš s Blankou hráli novou hru NIM, ve které bylo možné brát 1, 2, nebo 3 kameny.**

$$11 \xrightarrow[A]{3} 8 \xrightarrow[B]{1} 7 \xrightarrow[A]{2} 5 \xrightarrow[B]{1} 4 \xrightarrow[A]{?}$$

Tentokráte se vzdal Aleš. Rozhodni, které z kroků Aleše a Blanky byly dobré a které chybné.

5. **Aleš s Blankou hráli opět novou hru NIM. V ní bylo možné brát 1, 2, 3 nebo 4 kameny a na kopě bylo 100 kamenů. Aleš si mohl zvolit, zda bude začínat hru. Co mu doporučíš?**

✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

VÝSLEDKY:

1. V původní hře je vítěznou strategií nechávat soupeři počet kamenů, který je násobkem tří (při rozšíření pravidla násobkem čtyř). Tyto pozice jsou kritické a jejich poznání vede k odhalení strategie.

2. Hned v prvním kroku měla Blanka brát pouze jeden kámen a mohla vyhrát.

3. Návod: Hrej vždy tak, aby po tvém tahu zůstal na kopě počet kamenů dělitelný třemi. V případě, že začínáme se 100 kameny, v prvním tahu vezmu jeden kámen. Pak, když soupeř odebere 1 kámen, já odeberu 2, a když soupeř odebere 2 kameny, já odeberu 1. Když začínám s počtem kamenů dělitelným třemi, pak nemám šanci vyhrát, pokud soupeř zná vítěznou strategii.

4. Kritické pozice v této hře jsou čísla 4, 8, 12, … Hráč, který je v kritické pozici, prohraje, když jeho soupeř ví, jak vyhrát. První krok Aleše byl dobrý, protože vytvořil kritickou pozici. V ní Blanka neměla žádný vítězný tah a rozhodla se vzít jen jeden kámen. Druhý Alešův tah byl chybný. Měl vzít 3 kameny. V závěru vzal jen 2 a Blanka udělala vítězný tah.

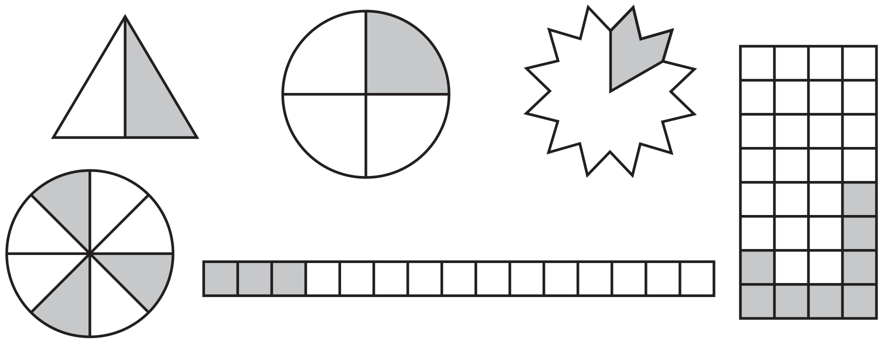
5. Kritické pozice jsou čísla 5, 10, 15, ... I 100 je kritická pozice. Tedy Aleš, který je začínající hráč, nutně prohraje, když Blanka zná strategii.

KOMENTÁŘ: Cílem hry je vést žáky k odhalení vítězné strategie. Strategie hry je návod, jak hrát, abych vyhrál. Návod učitel nesmí prozradit. Pokud žáci strategii odhalí, přidáme víc kamenů. Můžeme změnit i pravidlo a dovolit odebírání nejen jednoho nebo dvou, ale i tří nebo i více kamenů. Dále můžeme změnit pravidlo o vítězi – ten, kdo bere poslední kámen, prohrál.

1.2 ZLOMKY A DESETINNÁ ČÍSLA

1.2.1 ZLOMKY V ŽIVOTNÍ ZKUŠENOSTI ŽÁKA

1. Ke každému obrazci napiš, jaká jeho část je obarvena šedou barvou:



2. Petra měla v pytlíku 60 bonbónů. Kolik bonbónů jí zůstane a jaká část všech bonbónů to bude, když se o ně spravedlivě rozdělí

a) se svou nejlepší kamarádkou,
b) s mámou a s tátou,
c) se svými třemi sourozenci,
d) s pěti spolužáky?

3. Plot má 100 latěk. Jarda natřel už $\frac{3}{4}$ plotu.

a) Jakou část plotu mu ještě zbývá natřít?
b) Kolik planěk mu ještě zbývá natřít?
c) Natřel už více než tři pětiny plotu?

4. Honza si koupil dvoulitrovou láhev vody. Vypil z ní už $\frac{3}{5}$.

a) Vypil více nebo méně než polovinu vody?
b) Kolik decilitrů vody už vypil?
c) Jaké množství vody mu ještě zbývá?

5. Petr jede na kole z domu k babičce. Ujel už $\frac{5}{6}$ cesty a zbývají mu ujet ještě 4 kilometry.

a) Jaká část cesty mu ještě zbývá ujet?
b) Jak dlouhá je celá cesta?
c) Kolik km už ujel?

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY: **1.** trojúhelník $\frac{1}{2}$, kruh $\frac{1}{4}$, hvězda $\frac{1}{6}$, kruh $\frac{3}{8}$, pás $\frac{3}{15}$ nebo $\frac{1}{5}$, obdélník $\frac{8}{32}$ nebo $\frac{1}{4}$.

2a) 30, $\frac{1}{2}$; **2b)** 20, $\frac{1}{3}$; **2c)** 15, $\frac{1}{4}$; **2d)** 10, $\frac{1}{6}$.

3a) $\frac{1}{4}$; **3b)** 25; **3c)** ano.

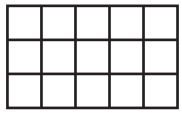
4a) více; **4b)** 1,2 litru; **4c)** $\frac{2}{5}$, což jest 0,8 litru.

5a) $\frac{1}{6}$; **5b)** 24 km; **5c)** 20 km.

1.2.2 RELACE A OPERACE SE ZLOMKY

1. Když Sandra měla sčítat $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$, zvolila k tomu obdélník o rozměrech 5 × 3. Řekla si: V obdélníku mám 15 čtverečků, a zapsala: Obdélník = 15 □.

Doplň vymazaná čísla ze Sandřina výpočtu.



1 □ = ____ obdélníku,

$\frac{1}{3}$ obdélníku = ____ □ ,

$\frac{2}{5}$ obdélníku = ____ □ ,

$\frac{1}{3}$ obdélníku + $\frac{2}{5}$ obdélníku = ____ □ + ____ □ = ____ □ = ____ obdélníku.

Sandra si $\frac{1}{3}$ obdélníku vybarvila červeně a $\frac{2}{5}$ modře. Udělej totéž.

2. Pomocí Sandřina obdélníku 5 × 3:

a) zjisti, který ze zlomků $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ je největší a který nejmenší,

b) vypočítej $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ a $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$.

3. Pomocí vhodného obdélníku způsobem Sandry porovnej zlomky a doplň mezi ně správná znaménka (> , < , =):

a) $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{8}$ c) $\frac{3}{7}$ $\frac{6}{14}$ d) $\frac{6}{14}$ $\frac{9}{21}$

e) $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{11}$ f) $\frac{20}{7}$ $\frac{10}{3}$ g) $\frac{36}{63}$ $\frac{19}{35}$ h) $\frac{234}{567}$ $\frac{78}{90}$

4. Babička upletla $\frac{1}{4}$ svetru žlutou barvou a $\frac{3}{8}$ modrou barvou. Zbytek byl červený. Jaká část svetru je červená?

5. $\frac{1}{3}$ dětí ve třídě jsou děvčata. Z děvčat závodně tancuje $\frac{1}{2}$ a z chlapců $\frac{1}{6}$.

a) Jaká část dětí ze třídy tancuje?

b) Kolik chlapců a kolik děvčat tancuje, jestliže ve třídě je 36 dětí?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. V obdélníku je 15 □, 1 □ = $\frac{1}{15}$ obdélníku. $\frac{1}{3}$ obdélníku = 5 □, $\frac{2}{5}$ obdélníku = 6 □, $(\frac{1}{3} + \frac{2}{5})$ obdélníku = (5 □ + 6 □) = 11 □ = $\frac{11}{15}$ obdélníku.

2a) $\frac{1}{3}$ obdélníku = 5 □, $\frac{2}{3}$ obdélníku = 10 □, $\frac{3}{5}$ obdélníku = 9 □;

2b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

3a) < ; **3b)** > ; **3c)** = ; **3d)** = ; **3e)** > ; **3f)** < ; **3g)** > ; **3h)** < .

4. $\frac{3}{8}$ svetru jsou červené.

5a) $\frac{5}{18}$ dětí;

5b) 4 chlapci a 6 děvčat.

KOMENTÁŘ: Tradičně bývá sčítání, odčítání i porovnávání (ale později i násobení a dělení) zlomků opřeno o návody. Návod umožní žákům rychle příslušnou operaci uskutečnit, ale na druhé straně jim nedává porozumění manipulaci se zlomky. Proto zde operace sčítání a odčítání zlomků modelujeme na vhodném obdélníku (tabulce čokolády).

1.2.3 DESETINNÁ ČÍSLA I

1a) Přečti čísla a doplň tabulku (napiš jedničky do správných oken).

	stovky	desítky	jednotky	,	desetiny	setiny	tisíciny
1,1				,			
1,01				,			
100,01				,			
100,011				,			

b) Které z čísel 1,1 a 1,01 je větší?
c) Které z čísel 100,01 a 100,011 je menší?

2. Seřaď šest největších států světa podle rozlohy, začni od největšího z nich:

Stát	**USA**	**Rusko**	**Austrálie**	**Čína**	**Brazílie**	**Kanada**
Rozloha (mil. km^2)	**9,629**	**17,075**	**7,687**	**9,597**	**8,512**	**9,976**
Pořadí						

3. Ve slalomu byly naměřeny závodníkům tyto časy: Adam 45,017, Boris 46,021, Cyril 45,398, David 44,881, Emil 45,899, Filip 44,905.

a) Seřaď závodníky od nejrychlejšího k nejpomalejšímu.
b) Zuzka zjistila, že do rozmezí 1s se vešli 4 závodníci. Kteří?

4. V desetinných číslech 6,*8 a 6,7* nahraď obě * stejnou číslicí tak, aby první číslo bylo větší než druhé. Vypočítej rozdíl těchto čísel. Najdi všechna řešení.

5. Myslím si číslo. Rozdíl tohoto čísla a čísla 3,02 je 0,1. Jaké si myslím číslo? Najdi všechna řešení.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY: **1a)**

	stovky	desítky	jednotky	,	desetiny	setiny	tisíciny
1,1			1	,	1		
1,01			1	,		1	
100,01	1			,		1	
100,011	1			,		1	1

1b) 1,1;
1c) 100,01.
2. Pořadí je 3, 1, 6, 4, 5, 2, tj. Rusko, Kanada, USA, Čína, Brazílie a Austrálie.
3a) David, Filip, Adam, Cyril, Emil, Boris;
3b) David, Filip, Adam, Cyril.
4. * = 7, rozdíl je 0,01; * = 8, rozdíl je 0,1; * = 9, rozdíl je 0,19.
5. Myslím si buď 2,92, nebo 3,12.

KOMENTÁŘ: **3.** Některým žákům může dělat potíže slovo „rozmezí“. Nejlépe, když je vysvětlí některý žák.

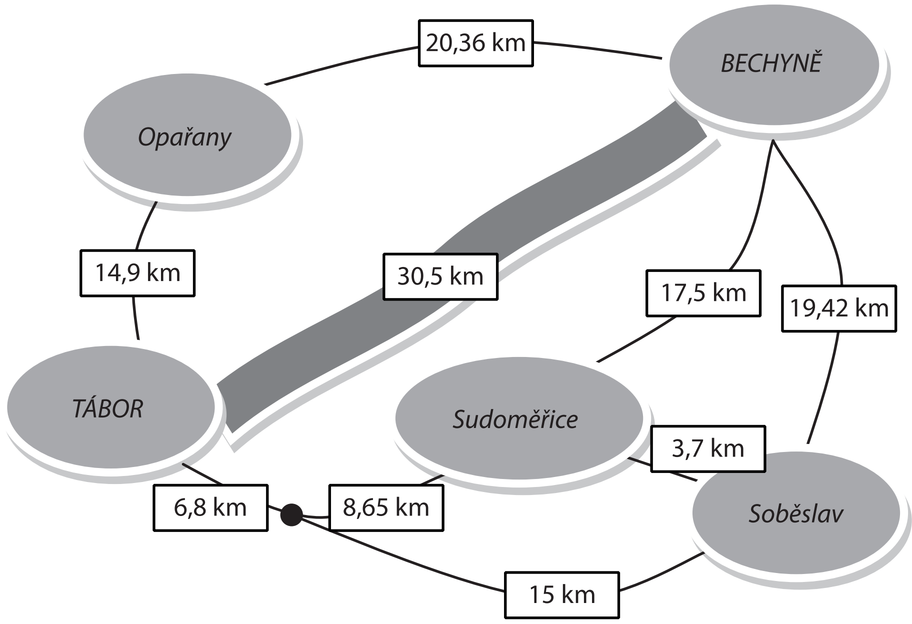
1.2.4 DESETINNÁ ČÍSLA II

1. Následujících sedm čísel rozděl do tří skupin tak, aby součet čísel v každé skupině bylo číslo celé: 1,246 1,28 1,354 1,4 1,45 1,55 1,72

2. Do výpočtu (_______ + _______) – _______ vlož čísla

a) 3,47; 4,01; 6,54;
b) 3,75; 4,30; 5,55 tak, aby výsledkem bylo celé číslo.

3. Z Tábora do Bechyně po řece Lužnici je 30,5 km.



a) Jak je dlouhá nejkratší cesta po silnici z Tábora do Bechyně?
b) O kolik km je tato cesta delší než cesta po řece?
c) Martin jezdí na kole z Tábora okružní jízdu přes Opařany, Bechyni, Soběslav a Sudoměřice. Kolik kilometrů ujede za 3 kola?
d) Kolik hodin mu to trvá, jestliže ujede průměrně 25 km za hodinu?
e) Franta jel dvakrát okruh Soběslav, Bechyně, Sudoměřice. Trvalo mu to přesně 4 hodiny. Jaká byla jeho průměrná rychlost?

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1. Skupina A – 1,246 a 1,354 a 1,4; skupina B – 1,28 a 1,72; skupina C – 1,45 a 1,55.
2a) (3,47 + 6,54) – 4,01;
2b) (3,75 + 5,55) – 4,3.
3a) 32,95 km;
3b) 2,45 km;
3c) 229,44 km;
3d) 9,1776 h;
3e) 20,31 km/h.

KOMENTÁŘ: Žák, který nemá představu o desetinných číslech v řádu desetin a setin, desetinným číslům nerozumí. Naštěstí v okolním světě se tato čísla dosti hojně vyskytují, a proto je možné využívat životní zkušenosti žáků. To ovšem u čísel v řádu setin nebo tisícin již možné není.

1.2.5 VAZBA ZLOMKŮ A DESETINNÝCH ČÍSEL

1. Klotylda měla papírový metr a složila jej na půl. Zjistila, že to je 50 cm, což je 0,5 m, a to je $\frac{1}{2}$ m. Tyto údaje napsala do prvního sloupce tabulky. Doplň celou tabulku:

zlomek	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$					$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{25}$		$\frac{1}{3}$
cm	50		75	40					12,5	
m	0,5				0,6	0,7				

2. Petr se hádal s Pavlem, kdo má větší kus koláče. Kdo má víc?

Kroužkuj, kdo má víc:

Petr	0,25	0,125	$\frac{1}{3}$	0,67	$\frac{3}{8}$	0,44	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0,57	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$
Pavel	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0,33	$\frac{2}{3}$	0,38	$\frac{4}{9}$	0,14	0,29	$\frac{4}{7}$	0,10	0,11

3. Dostal jsem za úkol natřít plot. $\frac{2}{3}$ plotu natřel tatínek, 0,3 plotu jsem natřel já, zbývá natřít 1,5 m plotu.

a) Jak je plot dlouhý?
b) Jakou část plotu zbývá natřít?

4. Šetříme s bratrem na počítač. Já jsem našetřil $\frac{2}{5}$ ceny, bratr našetřil 0,35 ceny. Ještě musíme našetřit 3 200 Kč.

a) Kolik korun stojí počítač?
b) Kolik korun jsem zatím našetřil já a kolik bratr?
c) Kolik korun musím ještě našetřit já a kolik bratr, abychom oba vložili stejný díl?

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY: **1.**

zlomek	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$
cm	50	25	75	40	60	70	45	36	12,5	33,33..
m	0,5	0,25	0,75	0,4	0,6	0,7	0,45	0,36	0,125	0,333..

2.

Petr	**0,25**	**0,125**	**$\frac{1}{3}$**	**0,67**	$\frac{3}{8}$	0,44	**$\frac{1}{7}$**	$\frac{2}{7}$	0,57	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$
Pavel	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0,33	$\frac{2}{3}$	**0,38**	**$\frac{4}{9}$**	0,14	**0,29**	**$\frac{4}{7}$**	0,10	**0,11**

3a) 45 m;
3b) 1,5 m.
4a) 12 800 Kč;
4b) já 5 120 Kč, bratr 4 480 Kč;
4c) já 1 280 Kč, bratr 1 920 Kč.

KOMENTÁŘ: Úlohy mají i diagnostický charakter. Ukazují, zda práce s částí je danému žákovi bližší v jazyce zlomků, nebo v jazyce desetinných čísel.

1.2.6 SLOVNÍ ÚLOHY I

1. **Cena jedné SMS je 0,90 Kč a jedna minuta hovoru stojí 3,60 Kč. V únoru jsi poslal 35 zpráv a provolal 15 minut.**
   a) Kolik korun zaplatíš za SMS poslané v únoru?
   b) Kolik korun zaplatíš za únorová volání?
   c) Tvůj kredit byl 150 Kč. Kolik korun ti ještě zbývá?

2. **Na účtu bylo za 3 kg brambor 32,70 Kč a za půl kila cibule 5,50 Kč. Co je dražší, 1 kg brambor, nebo 1 kg cibule, a o kolik?**

3. **Před Vánoci naše prodejna prodala 5 000 mobilních telefonů. Normální telefon byl za 3 200 Kč a telefon s dotykovým displejem za 5 600 Kč. $\frac{4}{5}$ prodaných telefonů bylo s dotykovým displejem.**
   a) Kolik telefonů každého typu bylo prodáno?
   b) Kolik peněz bylo získáno za prodej každého typu?
   c) Kolik peněz celkem bylo získáno za prodej mobilních telefonů?

4. **Novákovi mají dvě děti. Výška syna je $\frac{2}{3}$ výšky táty, výška dcery je $\frac{2}{3}$ výšky mámy, výška táty je $\frac{20}{19}$ výšky mámy a táta se synem mají dohromady 3 m. Kolik měří každý člen rodiny?**

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1a) 31,50;
1b) 54;
1c) 64,50.
2. cibule o 0,10 Kč (brambory 10,90 Kč/kg, cibule 11 Kč/kg).
3a) 1 000 ks normálních mobilů a 4 000 ks s dotykovým displejem;
3b) 3 200 000 Kč za normální a 22 400 000 Kč za mobily s dotykovým displejem;
3c) celkem 25 600 000 Kč.
4. Táta 180 cm, máma 171 cm, syn 120 cm, dcera 114 cm.

KOMENTÁŘ:
4. Výchozí vztahy jsou „Výška syna je $\frac{2}{3}$ výšky táty“ a „Táta se synem mají dohromady 3 m“. Odtud 300 cm = $\frac{5}{3}$ výšky táty atd.

1.2.7 SLOVNÍ ÚLOHY II

1. **Boris má dnes polovinu let Adama. Za 4 roky bude Borisovi tolik, co je Adamovi dnes. Kolik let je dnes Borisovi?**

2. **Táta se synem mají dnes dohromady 45 let. Syn má $\frac{1}{4}$ let otce. Za kolik let bude mít syn polovinu otcových let?**

3. **Dnes má Bára $\frac{1}{2}$ let Aničky. Za 5 let bude mít Anička $\frac{3}{2}$ let Báry. Kolik let má dnes Bára?**

4. **Před třemi roky měl Ludva $\frac{1}{10}$ dnešního věku Kláry. Dnes má Ludva $\frac{2}{5}$ věku Kláry. Kolik je dnes Kláře?**

5. **Za $\frac{2}{3}$ hodiny se naplní $\frac{1}{2}$ bazénu. Za jak dlouho se naplní celý?**

6. **Celý bazén se naplní za 7 hodin. Doplň tabulku, která uvádí, jaká část bazénu B se naplní za daný čas Č (čas zapisujeme takto: 0:32 = 32 min; 2:05 = 2 h 5 min).**

Č	7:00	1:00		1:30		0:35		1:45		3:00		0:21	
B	1		$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{5}{12}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{4}{15}$		0,35

7. **Přítokem A se za 1 hod naplní $\frac{1}{5}$ bazénu, přítokem B se za 1 hod naplní 0,3 bazénu.**
   a) Za jak dlouho se bazén naplní oběma přítoky?
   b) Za jak dlouho se bazén naplní, jestliže první hodinu tečou oba přítoky a dále již jen přítok A?
   c) Za jak dlouho se bazén naplní, jestliže první hodinu tečou oba přítoky a dále již jen přítok B?

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

VÝSLEDKY:

1. Borisovi jsou dnes 4 roky.
2. Za 18 let.
3. Báře je dnes 5 let.
4. Kláře je 10 let.
5. Za 80 minut, tj. 1:20.
6.

Č	7:00	1:00	0:30	1:30	1:10	0:35	2:45	1:45	2:20	3:00	1:48	0:21	2:27
B	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{20}$	0,35

7a) za 2 h;
7b) za 3 h 30 min;
7c) za 2 h 40 min.

1.3 CELÁ ČÍSLA

1.3.1 KROKOVÁNÍ

Jan a Tom stojí na stejném schodu schodiště a oba hledí směrem nahoru. Jan udělal 3 kroky nahoru, 1 krok dolů a dva kroky nahoru. Tom udělal 4 kroky nahoru a opět stál vedle Jana. Krokování hochů zapíšeme pomocí šipek takto: Jan: |→→→|←|→→| a Tom: |→→→→|. Oba začali na stejném schodu i skončili na stejném schodu. Pomocí šipek to zapíšeme rovností: |→→→|←|→→| = |→→→→|.

1. Vyřeš šipkovou rovnici, tj. doplň šipky do šedivých polí v rovnicích, které představují krokování Jana a Toma. V jednom poli mohou být šipky pouze jednoho směru.

a) |→|←←|→→→| = |______|　　　b) |←|→→|←←| = |______|

2. Vyřeš. Jestliže v šedivém poli není žádná šipka, zapiš tam 0.

a) |→→→|←| = |→|______|　　　b) |←←|→| = |______|←←←|

c) |←←←| = |→|______|←←|　　　d) |←←|→→→| = |→|______|

3. Vyřeš. Můžeš použít nejvíce tři šipky. Najdi všechna řešení.

a) |→|______| = |←|______|　　　b) |→|______| = |→→|______|

c) |←| = |→|______|←|______|　　　d) |______|→| = |→→|______|←|

Kroky zaznamenané pomocí šipek je možné zapsat i pomocí čísel. Šipky doprava (kroky nahoru po schodech) zapíšeme jako kladné číslo a šipky doleva (kroky dolů po schodech) jako záporné číslo. Šipková rovnost |→→→|←|→→| = |→→→→| bude zapsána takto:
$+3 - 1 + 2 = +4$, nebo stručně $3 - 1 + 2 = 4$. Šedivé pole při přepisu do čísel označíme pomocí neznámé x, resp. y. Například úlohu 2b) zapíšeme takto: $-2 + 1 = x - 3$. Řešení této rovnice je $x = 2$, což představuje 2 šipky doprava.

4. Šipkové rovnice ze cvičení 1 a 2 zapiš pomocí číselných rovnic a vyřeš.

✂ ------------------------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------------ ✂

VÝSLEDKY:

1a) |→→|;
1b) |←|.
2a) |→|;
2b) |→→|;
2c) |←←|;
2d) |0|.
3a) |→|←←| = |←| 0 | nebo |→|←| = |←|→| nebo |←| 0 | = |←|→→|;
3b) |→|→| = |→→| 0 | nebo |→|→→| = |→→|→| nebo |→|←| = |→→|←←|;
3c) |←| = |→|←|←| 0 | nebo |←| = |→| 0 |←|←| nebo |←| = |→|→|←|←←| nebo |←| = |→|←←|←|→|;
3d) | 0 |→| = |→→| 0 |←| nebo |→|→| = |→→|→|←| nebo |←|→| = |→→|←|←|.
4. **1a)** $1 - 2 + 3 = x$, $x = 2$;
1b) $-1 + 2 - 2 = x$, $x = -1$;
2a) $3 - 1 = 1 + x$, $x = 1$;
2b) $-2 + 1 = x - 3$, $x = 2$;
2c) $-3 = 1 + x - 2$, $x = -2$;
2d) $-2 + 3 = 1 + x$, $x = 0$.

1.3.2 KROKOVÁNÍ S ČELEM VZAD

1. Rovnici zapiš pomocí šipek, vyřeš a krokováním ověř výsledek.

a) $4 - x = 1$ b) $1 + y - 2 = -2$
c) $x - 3 = 2 - 1$ d) $-1 + 2 = y + 3$

Do šipek a krokování je možné převádět i zápisy, ve kterých je minus před závorkou. Využijeme k tomu povel „čelem vzad“, který zapíšeme pomocí |⮌|. Když žák stojí čelem ze schodů dolů, pak → pro něj znamená jeden krok za nosem, tj. jeden schod dolů, a ← pro něj znamená jeden krok pozpátku, tj. jeden krok nahoru. Například zápis 2 – (3 – 1) + 1 přepíšeme do šipek |→→|⮌|→→→|←|⮌|→|. U krokování to je 2 kroky nahoru, čelem vzad, 3 kroky za nosem (dolů), 1 krok pozpátku (nahoru), čelem vzad a 1 krok za nosem (nahoru). Zjednodušeně to je jeden krok za nosem (nahoru), tj. |→|, neboli +1.

2. Číselný zápis přepiš do šipek a oba zápisy zjednoduš.

a) 3 – (1 – 4)   b) 0 – 2 + (2 – 5) + 6
c) 4 – (2 – 3) – 5   d) -1 – (1 – 3) – (2 – 1)

3. Přepiš šipkovou rovnici pomocí čísel, obě rovnice vyřeš a ověř krokováním.

a) |________|⮌|→→→|←|⮌| = |→→|
b) |→→→|⮌|________|←|⮌| = |→|
c) |←|⮌|→→|________|⮌| = 0
d) |⮌|________|←←|⮌|→| = |→→→→|

4. Vyřeš šipkovou rovnici tak, že doplníš nejvýše tři šipky. Najdi všechna řešení. Výsledek ověř krokováním.

a) |→|⮌|________|→|⮌| = |________|→→|
b) |←|________| = |→|⮌|→→|________|⮌|
c) |⮌|________|←←|⮌|→| = |←|⮌|________|←←←|⮌|

5. Jako číselné rovnice o dvou neznámých zapiš šipkové rovnice ze cvičení 4.

✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

VÝSLEDKY:

1a) |→→→→| | = |→|, řešení šipkami: |←←←|, řešení číselné: $x = -3$;
1b) |→|←←| = |←←|, |←|, $y = -1$;
1c) | |←←←| = |→→|←|, |→→→→|, $x = 4$;
1d) |←|→→| = | |→→→|, |←←|, $y = -2$.
2a) +6, |→→→|⮌|→|←←←←|⮌| = |→→→→→→|;
2b) +1, | 0 |←←|→→|←←←←←|→→→→→→| = |→|;
2c) 0, |→→→→|⮌|→→|←←←|⮌|←←←←←| = | 0 |;
2d) 0; |←|⮌|→|←←←|⮌|⮌|→→|←|⮌| = | 0 |.
3a) |→→→→|, $x - (3 - 1) = 2$, $x = 4$;   **3b)** |→→→|, $3 - (x - 1) = 1$, $x = 3$;
3c) |→→→|, $-1 - (2 + x) = 0$, $x = 3$;   **3d)** |←|, $-(x - 2) + 1 = 4$, $x = -1$.
4a) (Řešení viz Úvod) |→|⮌|←←|→|⮌| = | 0 |→→| nebo |→|⮌|←|→|⮌| = |←|→→|
nebo |→|⮌| 0 |→|⮌| = |←←|→→|;
4b) |←| 0 | = |→|⮌|→→| 0 |⮌| nebo |←|←| = |→|⮌|→→|→|⮌| nebo |←|→| = |→|⮌|→→|←|⮌|;
4c) |⮌|→→|←←|⮌|→| = |←|⮌|→|←←←|⮌| nebo |⮌|→|←←|⮌|→| = |←|⮌| 0 |←←←|⮌| nebo
|⮌| 0 |←←|⮌|→| = |←|⮌|←|←←←|⮌| nebo |⮌|←|←←|⮌|→| = |←|⮌|←←|←←←|⮌|.
5. Podmínka: $|x| + |y| \leq 3$.
5a) $1 - (x + 1) = y + 2$;   **5b)** $-1 + x = 1 - (2 + y)$;   **5c)** $-(x - 2) + 1 = -1 - (y - 3)$.

1.3.3 CELÁ ČÍSLA V PROSTŘEDÍCH

V hadovi jsou čísla tří typů: základní čísla v polích $\bigcirc$, čísla přičítání nebo odčítání v polích $\square$ a čísla násobení nebo dělení v polích $\square$.

$$7 \xrightarrow{\cdot 5} 35 \xrightarrow{+1} 36 \xrightarrow{:9} 4 \xrightarrow{-10} -6$$

Každou šipku v hadovi můžeme přepsat jako číselnou rovnost. Zde to jsou: $7 \cdot 5 = 35$, $35 + 1 = 36$, $36 : 9 = 4$, $4 - 10 = -6$

1. Doplň:

a) $5 \xrightarrow{+3} \bigcirc \xleftarrow{\cdot 2} \bigcirc$

b) $5 \xrightarrow{\square} -10 \xrightarrow{\square} -12 \xleftarrow{\square} -3$

c) $13 \xrightarrow{\cdot 7} \bigcirc \xrightarrow{\square} 1$

d) $21 \xrightarrow{+100} \bigcirc \xrightarrow{\square} \bigcirc \xleftarrow{\cdot 11} 1$

2. Doplň:

a) $-1 \xrightarrow{\square} 1 \xleftarrow{\square} 2$

b) $15 \xrightarrow{:9} \bigcirc \xrightarrow{\square} \bigcirc \xleftarrow{\cdot 2} 2$

3. Sestav hada, ve kterém jsou:

a) dvě šipky vpravo, začíná číslem 7 a dále jsou tam čísla 2, -3, 11, 14.
b) tři šipky vpravo, první číslo je 5 a dále jsou tam čísla -3, -4, 5, 10, -15, -20.

4. Doplň sčítací trojúhelníky:

2	5	7

-3	5	-2

9		-10
-12		

	5	
	6	
-1		

		-3
-7		
-10		

1		-4
-1		

3		1
-4		

-1		-6
3		

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY.

1a) 8, 4;
1b) · (-2), -2, · 4;
1c) 91, : 91;
1d) 121, : 11, 11.
2a) 2, : 2;
2b) $\frac{5}{3}$, + $\frac{7}{3}$, 4.
3a) $7 \cdot 2 = 14$, $14 - 3 = 11$;
3b) $5 \cdot (-3) = -15$, $-15 + (-5) = -20$, $-20 : (-4) = 5$ nebo $5 - 4 = -20$, $-20 + 5 = -15$, $-15 : 5 = -3$ nebo $5 - 4 = -20$, $-20 + 5 = -15$, $-15 : (-3) = 5$.
4. Uvedena jsou tři scházející čísla v pořadí, jak čteme. 7, 12, 19; 2, 3, 5; -21, -31, -43; -12, 1 ,-7; -7, 0, -3; 1, 2, -3; -4, -1, -3; 5, 4, -1.

1.3.4 FINANCE

1. **Druhák Dan hrál kuličky. Protože žádnou neměl, půjčil si dvě kuličky od Daga. Po hře měl v ruce 7 kuliček. Pak vrátil Dagovi dluh. Kolik kuliček nakonec Dan vyhrál?**

2. **Petr dostává každý měsíc vždy první den kapesné ve výši 250 Kč. Z toho 60 % utratí a zbytek si uloží do pokladničky. Sestav tabulku zachycující vývoj jeho úspor od září do června, jestliže víš, že před Vánoci utratil navíc za dárky 155 Kč a 5. března dostal k narozeninám 600 Kč. Na začátku letních prázdnin si chce Petr koupit MP4 přehrávač za 1 700 Kč. Kolik korun mu bude scházet? O prázdninách byl přehrávač zlevněn tak, že stál přesně tolik, kolik měl našetřeno. Jaká byla sleva?**

	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI
Počáteční stav	0									
Příjem	250	250								
Výdej										
Konečný stav										

3. **Richard měl 200 Kč. René mu dlužil 18 Kč. S kamarády šel do kina. Lístek ho stál 119 Kč. V kině si koupil zmrzlinu za 27 Kč. Druhý den šel koupit sestře knihu k narozeninám. Protože si nebyl jist, zda mu na dárek budou stačit vlastní peníze, půjčil si od maminky 200 Kč. Kniha stála 99 Kč. Další den odnesl sběr, za který dostal 43 Kč, a o dva dny později dostal Richard 50 Kč kapesné. Následující den mu René vrátil dlužnou částku. Vyber správnou odpověď na otázku, kdy nejdříve mohl Richard vrátit mamince peníze, které si od ní půjčil.**

   A) Když dostal peníze za sběr. B) Když dostal kapesné.
   C) Když mu René vrátil dlužnou částku. D) Zatím ne.

4. **Naďa koupila dárek pro dědečka. Použila na to svých 60 Kč a 3/5 z peněz, které jí maminka půjčila, 20 Kč, které jí zbyly, mamince vrátila. Kolik stál dárek pro dědečka?**

5. **Karel si uložil 1 500 Kč s úrokovou sazbou 2,1 %. Kolik korun měl na účtu po a) dvou letech, b) pěti letech?**

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:
1. Dan vyhrál 5 kuliček.
2. Petrovy úspory byly před prázdninami 1 445 Kč a na koupi MP4 přehrávače nestačily. Sleva byla 255 Kč, tj. 15 % z původní ceny přehrávače.
3B)
4. 90 Kč.
5a) 1 563,6615 zaokrouhleno na 1 564 Kč;
5b) 1 664,2554 zaokrouhleno na 1 664 Kč.

KOMENTÁŘ: Úlohy z finanční matematiky mají bezprostřední dopad na životní potřeby člověka. Jsou propojeny s učivem o desetinných číslech, zlomcích i procentech. Navíc v některých případech (střádání, splácení hypotéky) jsou vázány na proces. Všechny tyto aspekty se objevují v našich úlohách.

1.4 POMĚR, ÚMĚRNOST A PROCENTA

1.4.1 PŘÍMÁ ÚMĚRNOST

1. Na brigádě si vyděláš 90 Kč za hodinu. Kolik peněz si vyděláš za jednu směnu, která má a) 3 hodiny; b) 5 hodin; c) 8 hodin? Za kolik hodin si vyděláš přes 1 000 Kč. Doplň tabulku:

hodiny	1	3	5	8		
peníze	90					

2. Auto ujede na celou nádrž 51 litrů benzínu 680 km. Cena 1 l benzínu je 32,50 Kč. Doplň tabulku.

Litry benzínu	51	1			25,5	
Vzdálenost v km	680		100			170
Cena v Kč		32,50		1 000		

3. Dvacet žáků šlo do divadla. Lístky byly dvou cen – levnější a dražší.

a) Doplň tabulku.

Počet levnějších lístků	20		10			
Počet dražších lístků	0	20				
Cena za levnější lístky celkem	4 600				1 150	
Cena za dražší lístky celkem	0			930		
Cena celkem	4 600	6 200				5 880

b) Kolik celkem zaplatili, jestliže dražších lístků koupili třikrát více než levnějších.

4. V Zedlandu, kde se platí zedy, jsou progresivní daně z příjmu stanoveny takto: Z prvních 100 zedů se platí 10 %, z druhých 100 zedů 15 %, ze třetích 100 zedů 20 %, z peněz nad 300 zedů se platí 25 %. Jaká je mzda po zdanění (čistá mzda), když mzda před zdaněním (hrubá mzda) je a) 200; b) 300; c) 400; d) 160; e) 380; e) 520 zedů?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1.

hodiny	1	3	5	8	12
peníze	90	270	450	720	1080

2.

Litry benzínu	1	25,5	12,75	51
Vzdálenost km	7,7	196,35	170	680

3a)

Počet levnějších lístků	20	0	10	17	5	4
Počet dražších lístků	0	20	10	3	15	16
Cena za levnější lístky celkem	4 600	0	2 300	3 910	1 150	920
Cena za dražší lístky celkem	0	6 200	3 100	930	4 650	4 960
Cena celkem	4 600	6 200	5 400	4 840	5 800	5 880

3b) 5 800 Kč.

4a) 175; **4b)** 255; **4c)** 330; **4d)** 141; **4e)** 315; **4f)** 420 zedů.

1.4.2 NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

1. V následujících tvrzeních škrtni chybné slovo.

a) Čím více sušenek koupím, tím více/méně za ně zaplatím.
b) Když dort rozdělím na větší počet stejných kousků, bude velikost každého kousku větší/menší.
c) Čím více kombajnů vyjede na dané pole, tím větší/menší rozlohu každý z nich poseká.
d) Čím více kombajnů vyjede posekat dané pole, tím delší/kratší bude doba jejich práce.
e) Čím více koní krmíme ze zásoby krmení, tím delší/kratší dobu daná zásoba vydrží.
f) Čím pomaleji cyklista jede, za tím kratší/delší dobu danou vzdálenost ujede.

2. Dort má 2,4 kg. Maminka ho rozkrájela na 8 stejných kousků.

a) Kolik váží jeden kousek?
b) Kolik by vážil jeden kousek, kdyby maminka rozkrájela dort na 24 stejných kousků?
c) Kolikrát více kousků maminka nakrájela v druhém případě?
d) Kolikrát méně vážil v druhém případě jeden kousek?
e) Na kolik stejných kousků by maminka musela nakrájet dort, aby jeden kousek vážil 0,2 kg nebo 0,15 kg?

3. Šest řezbářů vyřeže 30 figurek za 8 hodin.

a) Čtyři řezbáři udělají za 6 hodin
A) 10 figurek B) 15 figurek C) 20 figurek D) 14 figurek.
b) 20 figurek vyřeže 8 řezbářů za
A) 6 hodin B) 14 hodin C) 4 hodiny D) 2 hodiny.
c) 45 figurek vyřežou za 36 hodin
A) 3 řezbáři B) 1 řezbář C) 2 řezbáři D) 4 řezbáři.
d) Doplň slovo a číslo do textu:
Čím více řezbářů, tím ………………… dobu jim trvá vyrobit 30 figurek. 1 řezbář to stihne za …………. hodin.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:
1. Škrtni: **a)** méně; **b)** větší; **c)** větší; **d)** delší; **e)** delší; **f)** kratší.
2a) 0,3 kg;
2b) 0,1 kg;
2c) 3krát více;
2d) 3 krát méně;
2e) 0,2 kg – 12 ks, 0,15 kg – 16 ks.
3a) B);
3b) C);
3c) C);
3d) kratší, 48.

KOMENTÁŘ: Přestože se v úlohách TIMSS nepřímá úměrnost neobjevila, považujeme za důležité tyto úlohy do sbírky zařadit.
1. Rozvíjí schopnost poznat na dané sémantické situaci, zda se jedná o úměrnost přímou nebo nepřímou.

1.4.3 ÚMĚRNOSTI VE 2D A 3D

1. **Nakresli čtverec o straně $a = 2$ cm. Jaký obsah S a obvod o má čtverec o straně a) $2a$; b) $3a$; c) $\frac{1}{2}a$?**
2. **Hrana krychle b měří 2 cm. Její povrch je S a objem je V. Jaký povrch a jaký objem má krychle o hraně a) $2b$; b) $3b$; c) $\frac{1}{2}b$?**
3. **Z 24 čtverečků o straně 1 cm sestav obdélník. Najdi všechna řešení a zaznamenej je do tabulky. Čísla v tabulce uváděj v cm.**

Delší strana	24					
Kratší strana	1					
Obvod	50					

4. **Ze 36 krychlí o hraně délky 1 cm tvoř pravidelné čtyřboké hranoly o rozměrech $a \times a \times b$. U každého hranolu zjisti jeho povrch S v cm² a součet délek hran h v cm. Najdi všechna řešení a zapiš je do tabulky.**

Délka hrany *a*						
Délka hrany *b*						
Součet délek hran *h*						
Povrch *S*						

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

VÝSLEDKY:

1a) $S = 4a^2 = 16\ \text{cm}^2$, $o = 8a = 16$ cm;
1b) $S = 9a^2 = 36\ \text{cm}^2$, $o = 12a = 24$ cm;
1c) $S = \frac{1}{4}a^2 = 1\ \text{cm}^2$, $o = 2a = 4$ cm.
2a) $S = 24b^2 = 96\ \text{cm}^2$, $V = 8b^3 = 64\ \text{cm}^3$;
2b) $S = 54b^2 = 216\ \text{cm}^2$, $V = 9b^3 = 72\ \text{cm}^3$;
2c) $S = \frac{3}{2}b^2 = 6\ \text{cm}^2$, $V = \frac{1}{8}b^3 = 1\ \text{cm}^3$.

3.

Delší strana	24	12	8	6		
Kratší strana	1	2	3	4		
Obvod	50	28	22	20		

4.

Délka hrany *a*	1	2	3	6		
Délka hrany *b*	36	9	4	1		
Součet délek hran *h*	152	52	40	52		
Povrch *S*	146	80	66	96		

1.4.4 PROCENTA, FINANCE

1. **V jedné pizzerii v Praze poskytují v neděli 20% slevu z ceny pizzy. V neděli jsme za pizzu zaplatili 104 Kč. Kolik korun bude stát tato pizza v úterý?**

2. **Časopis stál původně 104 Kč. Nyní byl zlevněn o 26 Kč. O kolik procent byl časopis zlevněn?**

3. **Ubytování v hotelu Orel stojí na den pro dospělého 1 420 Kč a pro dítě do 10 let jen 75 % této ceny. V hlavní sezóně jsou ceny o 30 % vyšší. Kolik zaplatí za týdenní pobyt v hlavní sezóně rodina (rodiče + 2 děti do 10 let), když se výsledná suma zaokrouhluje na stovky?**

4. **Ve výprodeji je cena zboží snížena o 50 %, nebo 40 %, nebo 30 %, nebo 20 %. Snížená cena je zaokrouhlena na celé koruny. Doplň scházející údaje do tabulky.**

Původní cena	820	460		329	1299	750				
Sníženo o		40 %	20 %		40 %		20 %	30 %	20 %	30 %
Nová cena	410		799			450	533		1120	
Ušetří se				99				162		246

5. **Vytvoř podobnou úlohu, jako je úloha 4, u které bude cena zboží snížena o 25 % a o 35 %.**

6. **Cena MP4 přehrávače byla snížena o 20 %. Stál pak 1 360 Kč. Kolik mohl Petr ušetřit, kdyby si koupil přehrávač až po slevě?**

7. **Cena koloběžek v listopadu klesla o 20 % a v dubnu jejich nová cena vzrostla o 20 %. Cena lyží v listopadu stoupla o 20 % a v dubnu jejich nová cena klesla o 20 %. Jak se změnila cena koloběžek a jak cena lyží v důsledku těchto dvou cenových úprav?**

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. 130 Kč.
2. O 25 %.
3. 34 790 Kč.
4.

Původní cena	820	460	999	329	1 299	750	666	540	1 400	820
Sníženo o	50 %	40 %	20 %	30 %	40 %	40 %	20 %	30 %	20 %	30 %
Nová cena	410	276	799	230	779	450	533	378	1 120	574
Ušetří se	410	184	200	99	520	300	133	162	280	246

6. 340 Kč.
7. V obou případech poklesla o 4%.

KOMENTÁŘ: Úlohy blízké těm, které se hojně objevují v TIMSS.

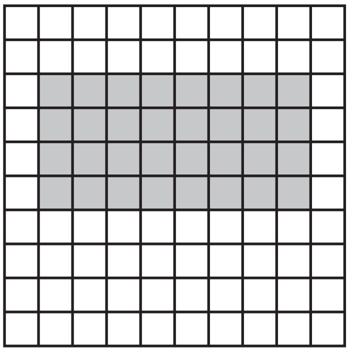
7. Pro žáky bývá překvapivé zjištění, že když cena klesne o 20 % a pak vzroste o 20 %, výsledná cena nebude stejná jako původní. Druhé překvapení této úlohy spočívá v poznání, že pokud onu změnu o 20 % uděláme v pořadí sleva–zvýšení, nebo v pořadí zvýšení–sleva, pak je v obou případech výsledek stejný.

1.4.5 VAZBA PROCENT, DESETINNÝCH ČÍSEL A ZLOMKŮ

Připomeňme si, že například 35 % ze 400 Kč je $\frac{7}{20}$ ze 400, a to je 0,35 ze 400 Kč, což je $0{,}35 \cdot 400 = \frac{7}{20} \cdot 400 = 140$ (Kč).

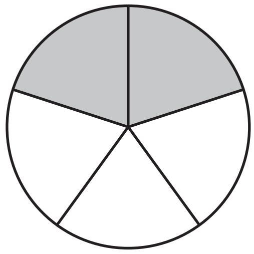
1. Zapiš zlomkem v základním tvaru, desetinným číslem i pomocí procent, jaká část obrazce je vybarvena.

a)



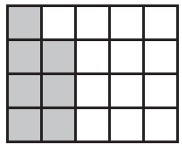
zlomek	desetinné číslo	procenta

b)



zlomek	desetinné číslo	procenta

c)



zlomek	desetinné číslo	procenta

2. Tyč je natřena čtyřmi barvami. 55 % tyče je natřeno modře, 0,2 tyče zeleně, $\frac{1}{8}$ tyče je hnědá a zbylých 45 cm je bílých. Jak je tyč dlouhá?

3. Na pultě bylo vystaveno pět zlevněných cédéček. Cédéčko A bylo zlevněno o 12 %, B o 15 %, C o 20 %, D o 21 % a E o 28 %. Když Franta vypočítal, kolik korun činí každé zlevnění, s překvapením zjistil, že je to pokaždé 42 Kč. Zjisti původní i novou cenu každého cédéčka.

4. Jsou dána čtyři desetinná čísla 0,2; 0,4; 0,5; 0,3. Právě dvě z těchto čísel jsou menší než zlomek

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{2}{7}$

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY:

1a) $\frac{8}{25}$, 0,32; 32 %;

2b) $\frac{2}{5}$, 0/4, 40 %;

2c) $\frac{7}{20}$, 0,35, 35 %.

2. 360 cm.

3. A stálo 350 Kč, B 280 Kč, C 210 Kč, D 200 Kč a E 150 Kč.

4B) $\frac{3}{8}$.

KOMENTÁŘ: Zlomky, desetinná čísla a procenta jsou tři různé jazyky, jimiž pracujeme s racionálními čísly. Schopnost převádět číslo z jednoho jazyka do druhého náleží k důležitým schopnostem práce s částmi. V úlohách **1–3** se o částech mluví v sémantických kontextech, v úloze **4** je kontext strukturální.

KOMENTÁŘE:

1.1.1 **1.** Důležitou geometrickou interpretací NSN (největší společný násobek) i nsd (nejmenší společný dělitel) je pokrývání pravoúhelníka pravoúhelníky. Když obdélník $m \times n$ pokrýváme čtverci, pak největší možný čtverec má stranu NSN(m, n). Když čtverec pokrýváme obdélníky $m \times n$, pak nejmenší možný čtverec je nsd (m, n).

2. Poznáváme zákonitosti aritmetiky zbytkových tříd Z_{12}. Rovnostranný trojúhelník s vrcholy (1, 5, 9) ukazuje tyto dvě zákonitosti:
– jsou to všechna čísla menší než 13, která při dělení 4 dají zbytek 1;
– rozestup každých dvou v aritmetice Z_{12} je 4 (neboť 9 + 4 = 1).
Podobně pro trojúhelník (3, 7, 11) platí, že je tvořen čísly menšími než 13, která při dělení 4 dají zbytek 3. Rozestup každých dvou v aritmetice Z_{12} je 4 (neboť 11 + 4 = 3).

1.1.3 Úlohy jsou věnovány porozumění významu jednotlivých řádů a správnému zápisu čísla v desítkové soustavě. Nezvládnutí této látky vede k chybám při zaokrouhlování a špatnému zápisu čísel při početních operacích.

1. Do úlohy získáme vhled, když čísla zapíšeme do tabulky 10 × 10.

2. Podobné úlohy někteří žáci tvoří rádi. Ve třídě lze udělat soutěž o nejhezčí úlohu tohoto typu. Porotu tvoří všichni žáci třídy.

3. V tabulce (pro 6. ročník) jsou číslice představeny hvězdičkami. Postupně můžeme přejít na zápis číslicemi a pro 8. ročník doplnit o řádek mocnin čísla 10. Později lze rozšířit tabulku i na čísla desetinná.

4. Úloha a) může vést k zajímavé diskusi ve třídě, pokud některý žák navrhne číslo 023. Vznikne otázka, zda může být považováno za trojmístné číslo. Objevitel čísla může argumentovat, že SPZ na autech jsou čtyřmístná čísla a jsou mezi nimi i čísla jako 0027 apod. Žáka objevitele pochválíme a vyjasníme situaci, že v matematice se pod trojmístným číslem rozumí každé přirozené číslo, které je větší než 99 a menší než 1 000.

5. Úlohu lze modifikovat: Ze šesti číslic 1, 2, 3, 4, 5 a 6 utvoř dvě trojmístná čísla, jejichž rozdíl je a) co největší; b) co nejmenší. V úloze b) může nápaditý žák přijít s řešením 23 – 85 = – 62. Žáka pochválíme a třídu vyzveme, aby na to reagovala. Lze očekávat, že se najde žák, který osvětlí, že pojem rozdíl čísel a, b je $|a - b|$.

1.2.1 **1.** U grafického znázorňování zlomků dopadli v TIMSS naši žáci nadprůměrně. Proto zde volíme i náročnější obrázky. Učitel může dát žákům úlohu: Obrázkem znázorni zlomek $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$.

2. Úlohu je možné dramatizovat, nebo aspoň znázornit graficky.

3. Tuto i následující dvě úlohy je vhodné graficky znázornit.

4. Úloha c) je diagnostická. Neříká žákovi, zda má odpovědět zlomkem, nebo desetinným číslem, nebo v jednotkách dcl. Žák zvolí ten jazyk, který je mu nejbližší.

1.2.7 Slovní úlohy o věku patří k náročným. Klíčem k jejich řešení je vhodný tabulkový zápis dat i vztahů. Ilustrujeme to na úlohách 1. a 2.

1.

	Dnes	**Potom**	
Adam	x		Rovnítko mezi polem AD a BP.
Boris	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2} + 4$	

2.

	Dnes	**Potom**	
Táta	x	$x + p$	Šipka od TP k SP a u šipky napsán operátor $\cdot \frac{1}{2}$
Syn	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{4} + p$	
Spolu	45		

1.3.1 Porovnejme úspěšnost našich žáků při řešení dvou úloh šetření TIMSS 2007 – v úloze M33 a M34. V obou případech se jedná o úpravu algebraického výrazu. U úlohy M33 byla úspěšnost skoro 76 %, u úlohy M34 to bylo méně než 25 %. Nejčastější chybné odpovědi (distraktory B a D) ukazují, že pravděpodobnou příčinou chyby je mínus před závorkou. Zkušenost ukazuje, že pro budování pojmu záporných čísel je užitečným prostředím krokování a v jeho rámci jsou úlohy s příkazem „čelem vzad“ didaktickým nástrojem pro propedeutiku práce se závorkami.

2d) Zápis -1 – (1 – 3) – (2 – 1) přepsaný do šipek |←|⮌|→|←←←|⮌|⮌|→→|←|⮌| obsahuje dvě „čelem vzad“ po sobě. Tyto povely se ale ruší, proto šipkový zápis lze psát |←|⮌|→|←←←|→→|←|⮌|, což v číslech značí -1 – (1 – 3 + 2 – 1). Zde vidíme, že přepis do šipek ukazuje číselnou úpravu – (1 – 3) – (2 – 1) = – (1 – 3 + 2 – 1).

4a) + 5a) |→|⮌|______|→|⮌| = |______|→→| K řešení použij nejvýše tři šipky. Když počet šipek v prvním šedivém boxu označíme x (včetně znaménka) a počet šipek ve druhém šedivém boxu označíme y, bude úloha zapsána rovnicí $1 - (x + 1) = y + 2$ a podmínkou $|x| + |y| \leq 3$. Rovnici zjednodušíme $-x = y + 2$. Vzhledem k podmínce $|x| + |y| \leq 3$ má poslední rovnice tři řešení: $x = -2$, $y = 0$, $x = -1$, $y = -1$ a $x = 0$, $y = -2$. V jazyce šipek: |→|⮌|←←|→|⮌| = | 0 |→→| nebo |→|⮌|←|→|⮌| = |←|→→| nebo |→|⮌| 0 |→|⮌| = |←←|→→|.

1.3.3 Prostředí hadů i součtových trojúhelníků jsou používána ve většině učebnic již na prvním stupni základní školy. Zde tato prostředí využíváme k hlubšímu pochopení aritmetiky celých čísel. Z didaktického hlediska čísla v polích ○ jsou stavy, čísla v polích □ jsou aditivní operátory a čísla v polích ▢ jsou multiplikativní operátory. Operátory pracují na stavech, mění je. Úlohy 1 a 2 jsou pouze seznamovací, až úloha 3 vyžaduje spekulování. Navíc úloha 3b) je náročná tím, že má čtyři řešení.

4. První trojúhelník je pouze „zahřívací“, další čtyři procvičují práci se zápornými čísly a poslední tři jsou náročné. Žáci je řeší metodou pokus omyl. Lze je ale řešit i rovnicí. Učitel může žákům poradit, ať prostřední horní číslo označí x. Více neradí. Žáci si tedy napíší první řádek (šestého) trojúhelníku $\boxed{1 \mid x \mid -4}$, pak sami přijdou na to, že prostřední řádek má tvar $\boxed{1 + x \mid x - 4}$ a že dolní číslo je $(1 + x) + (x - 4) = 2x - 3$. Ale dolní číslo známe, je to -1. Odtud $2x - 3 = -1$, a tedy $x = 1$.

1.4.3

1. Žák získává zkušenost, že obvod čtverce závisí na délce strany lineárně a jeho obsah kvadraticky.

2. Podobně povrch krychle závisí na délce hrany krychle kvadraticky a objem kubicky.

3. Úloha blízká úloze M44 v TIMSS. Zde navíc tabulka výsledků ukazuje, že čím blíže je obdélník ke čtverci, tím menší je jeho obvod.

4. Prostorová modifikace předchozí úlohy.

2 ALGEBRA

2.1 PÍSMENA MÍSTO ČÍSEL (PARAMETRY)

2.1.1 VAZBA PARAMETRŮ I

1. Petr má o 5 jedniček z matematiky více než Karel. Označíme počet jedniček Petra p. Pak počet jedniček Karla vyjádříme výrazem:

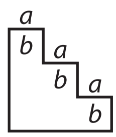
A) $5 - p$ B) $p + 5$ C) $5p$ D) $p - 5$

2. Truhláři připravují materiál pro montáž patra na spaní. Připravují 3 druhy prken stejné šířky. Délka prvního druhu je x cm. Délka druhého druhu je o 3 cm menší než dvojnásobek délky prkna prvního druhu. Od každého druhu prken je po 7 kusech. Třetí druh prkna (2 kusy na boční lišty) je y krát delší než první druh.

a) Jak dlouhá jsou prkna druhého a třetího druhu?
b) Celkovou délku prken lze vyjádřit výrazem:
A) $3(7x - 7) + 2xy$ C) $21x - 21 + 7xy$
B) $21x - 3 + 2xy$ D) $3x - 3 + xy$

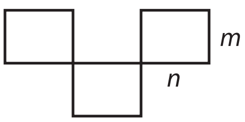
3. Obvod obrazce na obrázku se rovná

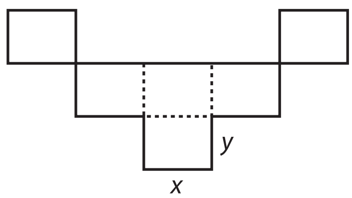
A) $3a + 4b$ B) $3a + 8b$
C) $6a + 6b$ D) $6a + 8b$



4. Rovnostranný trojúhelník o straně p má obvod o 12 cm menší než čtverec o straně q. Zapiš vztah mezi čísly p a q.

5. Urči výraz pro výpočet obvodu a obsahu následujících obrazců.

a)


b)


6. Které z čísel a, b, c, d, e je největší, když platí: $a - 1 = b + 2 = c - 5 = d + 4 = e - 3$?

A) a B) b C) c D) d

7. Zapiš:

a) Číslo z je o 1 větší než polovina čísla m.
b) Číslo z je o 3 menší než dvojnásobek čísla a.
c) Číslo z je třikrát větší než čtvrtina čísla x.
d) Třetina čísla z je o 5 menší než polovina čísla r.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1D). 2a)** $(2x - 3)$ cm a xy cm; **2b)** A). **3C). 4.** $3p + 12 = 4q$.
5a) $o = 6m + 6n$, $S = 3mn$; **5b)** $o = 10x + 8y$, $S = 6xy$. **6C).**
7a) $z = \frac{1}{2}m + 1$; **7b)** $z + 3 = 2a$; **7c)** $z = 3\left(\frac{x}{4}\right)$; **7d)** $\frac{z}{3} + 5 = \frac{r}{2}$.

2.1.2 VAZBA PARAMETRŮ II

1. Adamovi je a let a Borisovi je b let. Zapiš vztah mezi čísly a, b, jestliže víš, že

a) Cyril, jehož věk je trojnásobek věku Adama, je o 4 roky starší než Boris,
b) až bude Boris tak starý, jako je Adam, bude Adamovi 10 let.

2. Najdi vztah mezi dvěma parametry uvedenými v závorce.

a) P je počet sedadel v hledišti divadla, kde je 18 řad a v každé z nich je z sedadel. (P, z)
b) Čtverec s obsahem S má úhlopříčku d. (S, d)
c) S je obsah stěny krychle a V je její objem. (S, V)

3. Vašek má k Kč, Věra má m Kč. Najdi vztah mezi k a m, jestliže:

a) Věra má třikrát víc peněz než Vašek,
b) Věra má dvakrát méně peněz než Vašek,
c) Věra má o 1 Kč více, než je dvojnásobek Vaškových peněz,
d) Věra má o 7 Kč méně, než je polovina Vaškových peněz,
e) dvojnásobek Vaškových peněz zvětšený o 10 Kč se rovná trojnásobku Věřiných peněz zmenšených o 15 Kč,
f) když dá Věra 1 Kč Vaškovi, budou mít stejně.

4. Maminka má v peněžence v Kč. Kolik jí zbude, utratí-li u Kč? Jaká je podmínka řešitelnosti?

5. Petr má v peněžence 100 Kč. Kolik bude mít po c dnech, utratí-li každý den a Kč? Jaká čísla nemá v této úloze smysl dosadit za c, a?

6. Jak vysoký je dům, je-li o d metrů vyšší než věž kostela o výšce v metrů?

7. Ve třídě je r žáků. Kolik jich jelo na výlet, jestliže jich s zůstalo doma?

8. V tabulce jsou zapsány souřadnice bodů, které leží v přímce a.

a) Najdi druhou souřadnici bodu, který leží v přímce a, jestliže znáš jednu souřadnici. Doplň tabulku.

x	1	2	3	4	5	6	8		48
y	-3	-1	1	3	5			19	

b) Druhou souřadnici y bodu na přímce a vypočítáme pomocí první souřadnice x takto:
A) $y = x - 4$ B) $y = 10 - x$ C) $y = 2x - 5$ D) $y = -2x + 3$

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1a)** $3a - 4 = b$; **1b)** $2a = b + 10$. **2a)** $P = 18z$; **2b)** $S = \frac{1}{2}d^2$; **2c)** $V = S \cdot \sqrt{S}$.
3a) $3k = m$; **3b)** $k = 2m$; **3c)** $2k + 1 = m$; **3d)** $k/2 - 7 = m$; **3e)** $2k + 10 = 3m - 10$; **3f)** $m = k + 2$.
4. $(v - u)$ Kč, $(v > u)$. **5.** $(100 - ca)$ Kč, $ca \geq 100$. **6.** výška domu = $(v + d)$ metrů. **7.** $(r - s)$ žáků.
8a) tabulka; **8b)** C).

x	1	2	3	4	5	6	8	12	48
y	-3	-1	1	3	5	7	11	19	91

2.1.3 VAZBA PARAMETRŮ III

1. Jsou dány tři úsečky o délkách *a*, *b*, *c*, kde $a \leq b \leq c$. Zapiš podmínku pro to, aby existoval trojúhelník, jehož strany jsou shodné s danými třemi úsečkami.

2. Kvádr má rozměry podstavy *a*, *a* + 3, výška kvádru je o *b* větší než delší podstavná hrana. Objem daného kvádru je vyjádřen výrazem:

A) $a \cdot (a + 3) \cdot b$ B) $a \cdot a + 3 \cdot a \cdot \mathrm{b}$
C) $a \cdot (a + 3) \cdot (a + 3 + b)$ D) $a \cdot a + 3 \cdot b + a + 3$

3. Obdélník s délkami stran *a*, *b* má obvod *o* a obsah *S*. Jsou-li dány údaje *a* a *S*, vypočti *o*.

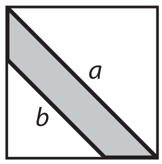
4. Obdélník s délkami stran *a*, *b* má obvod *o* a obsah *S*. Obsah *S* se pomocí *a*, *o* vypočítá takto:

A) $S = a \cdot o - \frac{a^2}{2}$ B) $S = a \cdot \frac{o}{2} - a^2$
C) $S = a \cdot (o - 2\,a)$ D) $S = a \cdot \frac{o}{2} - o^2$

5. V rovnoramenném trojúhelníku o základně *a* a rameni *b* je *v* výška na základnu. Jeden z údajů *a*, *b* nebo *v* vypočti pomocí ostatních dvou.

6. Objem válce *V* je dán vzorcem $V = \pi r^2 \cdot v$, povrch válce *S* je dán vzorcem $S = 2\pi r \cdot v + 2\pi r^2$, kde *r* je poloměr podstavy a *v* je výška válce. Vyjádři povrch válce *S* pomocí objemu *V* a poloměru *r*.

7. Na obrázku je nakreslen čtverec a v něm je vyznačen lichoběžník. Jeho základny jsou *a* a *b*. Obsah lichoběžníku je *S*. Jeden ze tří údajů *a*, *b* nebo *S* vyjádři pomocí ostatních dvou.



✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:

1. $c < a + b$.

2C).

3. $o = 2\,(a + \frac{S}{a})$.

4B).

5. $b = \sqrt{(v^2 + \frac{a^2}{4})}$ nebo $v = \sqrt{(b^2 - \frac{a^2}{4})}$ nebo $a = \sqrt{(4b^2 - v^2)}$.

6. $S = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$.

7. $S = \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$ nebo $a = \sqrt{(4S + b^2)}$ nebo $b = \sqrt{(a^2 - 4S)}$.

KOMENTÁŘ:

Trojici parametrů poznává žák zejména v geometrii. K těmto situacím se vztahují i naše úlohy: **1.** trojúhelníková nerovnost, **2.** objem kvádru, **3.** a **4.** obvod a obsah obdélníka, **5.** základna, rameno a výška rovnoramenného trojúhelníka, **6.** povrch a objem válce.

7. Náročná úloha se řeší jednoduchým trikem: Čtverec je rozdělen na větší trojúhelník s obsahem $\frac{a^2}{2}$, menší trojúhelník s obsahem $\frac{b^2}{2}$ a lichoběžník. Z těchto vztahů plyne, že $\boldsymbol{a}^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \mathrm{S}$. Vše další je již pouze úprava výrazů.

2.1.4 VÝROKY

1. **Mirek je vyšší než František, Pepa je vyšší než Vítek a nižší než František. Ve které skupině jsou chlapci seřazeni od nejvyššího po nejnižšího?**

   A) Mirek, Pepa, Vítek, František B) Mirek, František, Pepa, Vítek
   C) Vítek, Mirek, František, Pepa D) Pepa, Vítek, Mirek, František

2. **Firma UFO si účtuje za přepravu zásilky poplatky podle této rovnice: $c = 4h + 20$, kde h je hmotnost zásilky v gramech a c je cena v Kč. Firma UFO účtovala 140 Kč za přepravu zásilky o hmotnosti**

   A) 580 g B) 140 g C) 30 g D) 20 g

3. **Pro číslo x platí: $21 + 12x = 4(3x - 1) + 25$. Číslo x**

   A) je – 4 B) je $-\frac{11}{4}$ C) je jakékoli reálné číslo D) neexistuje.

4. **Andrej, Slávek, Robert a Marek se potkali na koncertě v Záhřebu. Bydlí v těchto městech: Paříž, Dubrovník, Řím a Berlín. Víme, že:**
   - **Dva chlapci, Andrej a chlapec z Berlína, přijeli do Záhřebu brzy ráno v den koncertu.**
   - **Žádný z těchto dvou chlapců nebyl ani v Paříži ani v Římě.**
   - **Robert není z Berlína a přijel do Záhřebu ve stejný čas jako chlapec z Paříže.**
   - **Oběma chlapcům, Markovi a chlapci z Paříže, se koncert velmi líbil.**

   Ve kterém městě žije Marek?

   A) Berlín B) Paříž C) Řím D) Dubrovník

5. **Ve francouzské restauraci stojí předkrm 5 euro, polévka 4 eura a hlavní jídlo 9 euro. Objednáme-li si celé menu (předkrm, polévku a hlavní jídlo), zaplatíme pouze 15 euro. Rozhodněte, které tvrzení je nepravdivé:**

   A) Mám-li 6 euro, mohu si koupit polévku nebo hlavní jídlo.
   B) Když mám méně než 10 euro, nemohu si koupit dva předkrmy.
   C) Objednám-li celé menu místo tří jednotlivých chodů, ušetřím méně než 4 eura.
   D) Mám-li více než 6 euro, určitě si mohu koupit dvě polévky.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1B).
2C).
3C).
4A).
5D).

KOMENTÁŘ:
1. Úloha slovně popisující situaci podobnou úloze M30 (M07-04).
2. Jde o úlohu podobnou úloze M40 (04-06).
3. Podobá se úloze M37 (M07-05).
Jestliže žák zvolí dosazovací strategii a dosadí $x = -4$, zjistí, že rovnost je splněna, a to jej může vést k chybnému závěru, že odpověď A) je správně. Totéž platí pro odpověď B).
5. Náročnost této úlohy spočívá v tom, že hledáme nepravdivé tvrzení a zamítáme tvrzení pravdivá.

2.2 ŘADY

2.2.1 RYTMUS VE 2D

1. Ze čtverců tří barev – bílá, šedá a černá, které se pravidelně střídají, kreslíme hradbu podle obrázku. Hradba na obrázku je složena z 10 čtverců. Lenka pokračovala v kreslení hradby, až v ní bylo 40 čtverců.

a) Lenka začala vyplňovat tabulku. Doplň ji a pokračuj.

Délka hradby	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	21		
Počet bílých	1	1	1	3	3	3	4							...			
Počet šedých	0	2	2	2	3	3								...			
Počet černých	0	0	1											...			
Počet celkem	1	3	4											...			

b) Jakou barvou končí Lenčina hradba?
c) Končí Lenčina hradba jedním čtvercem, nebo dvěma čtverci nad sebou?
d) Kolik čtverců bílých, kolik šedých a kolik černých je v Lenčině hradbě?
e) Kolik čtverců je v dolní řadě Lenčiny hradby?

2. Pokračujeme ve stavění hradby podle obrázku tak dlouho, až má dolní řada 187 čtverců.

a) Jakých čtverců je v hradbě nejvíce (bílých, šedých nebo černých) a kolik?
b) Kolik čtverců je v horní řadě?

3. Který výraz vyjadřuje délku hradby, která začíná a končí stejně? (*k* je přirozené číslo)

A) $6k$ B) $3k + 1$ C) $6k + 1$ D) $6k - 1$

4. Albert zakódoval horní obrázek hradby řadou písmen: a, B, c, A, b, C, a, B, c, A.

a) Pokračuj v řadě dalšími pěti písmeny.
b) Vysvětli, jak Albert obrázek zakódoval.

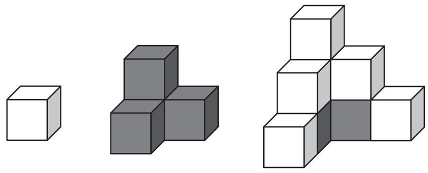
✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY:

1a) Tabulka první ř.: 1,1,1,3,3,3,4,4,4,6,6,6,7, …10, druhý ř.: 0,2,2,2,3,3,3,5,5,5,6,6,6,… 11, třetí ř.: 0,0,1,1,1,3,3,3,4,4,4,6,6, … 10, čtvrtý ř.: 1,3,4,6,7,9,10,12,13,15,16,18,19, …, 31;
1b) černou;
1c) jedním;
1d) bílých 13, šedých 14, černých 13;
1e) 27.
2a) nejvíce je bílých – 94, šedých a černých je stejně – 93;
2b) 93.
3C), neboť rytmus má periodu 6, takže na $(6k + 1)$-ém místě je to samé, co na prvním.
4a) …, b, C, a, B, c;
4b) Místo tří barev (bílá, šedá, černá) Albert použil tři písmena (á, bé, cé), místo jednoho čtverečku písmeno malé (a, b, c) a místo dvou čtverečků nad sebou písmeno velké (A, B, C).

2.2.2 RYTMUS VE 3D

1. Na obrázku 1 jsou znázorněny první tři etapy stavění dvojitých schodů. V první etapě jsme postavili jednu bílou krychli. Ve druhé jsme ji obložili třemi černými krychlemi a ve třetí jsme přidali dalších pět bílých krychlí. Postav stavbu ve třetí etapě a pokračuj etapou čtvrtou, pátou a šestou. Doplň tabulku, která popisuje stavby v jednotlivých etapách. Počtem stěn rozumíme počet stěn jednotlivých krychliček, které je možné vidět (když kolem stavby chodíme). Například u první stavby (jedna krychle) je vidět 5 stěn bílých. U druhé stavby jsou vidět 2 bílé a 13 černých stěn.

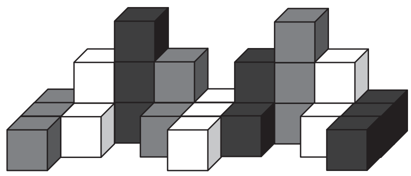


Obr. 1

Etapa	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
Počet bílých krychlí	1	1				
Počet černých krychlí	0	3				
Počet krychlí celkem	1	4				
Počet bílých stěn	5	2				
Počet černých stěn	0	13				
Počet stěn celkem	5	15				

2. Na obrázku 2 je hradba postavená ze tří různých typů dílů (ležatý hranol, růžek a sloupek), které jsou buď bílé, nebo šedé, nebo černé. Na první pozici zleva (1) je šedivý ležatý hranol, na druhé (2) je bílý růžek, na třetí (3) je černý sloupek, na čtvrté (4) je šedivý růžek, na páté (5) je ležatý bílý hranol a tak pokračujeme dále. Na kterých pozicích jsou

a) růžky?
b) ležaté hranoly?
c) sloupky?
d) černé díly?
e) bílé díly?
f) šedé díly?



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obr. 2

3. Přepiš rytmus z obrázku 2 tak, že místo tří barev – šedá, bílá, černá – použijeme 3 tvary – ○, △, □ a místo tří tvarů – ležatý hranol, stojatý hranol a růžek, použijeme tří barev – bílá, šedá a černá. (Například na 1. pozici je šedý ležatý hranol, který bude vyjádřen bílým kolečkem.)

. . . .

✂ ------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------ ✂

VÝSLEDKY:

1. Tabulka: Počet bílých krychlí: 1, 1, 6, 6, 15, 15. Počet černých krychlí: 0, 3, 3, 10, 10, 21. Počet krychlí celkem: 1, 4, 9, 16, 25, 36. Počet bílých stěn: 5, 2, 23, 12, 49, 30. Počet černých stěn: 0, 13, 6, 35, 20, 65. Počet stěn celkem: 5, 15, 29, 47, 69, 95.

2a) růžky jsou na sudých pozicích, obecně na pozicích s číslem $2n$, $n \in \mathbb{N}$;
2b) 1., 5., 9., 13., … $(1 + 4n)$; **2c)** 3., 7., 11., … $(3 + 4n)$; **2d)** 3., 6., 9., …$(3n)$;
2e) 2., 5., 8., … $(2 + 3n)$; **2f)** 1., 4., 7., … $(1 + 3n)$; **2g)** 39, 75, …, $36k + 6$. **2h)** černým růžkem.

3.

○	▲	■	●	△	■	●	▲	□	●	▲	■	○	▲	■
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2.2.3 ČÍSELNÉ ŘADY

1. Napiš další dvě čísla číselné řady:

a) 4, 7, 10, 13, 16, , , …
b) -8, -3, 2, 7, , , …
c) 3, 6, 12, 24, , , …
d) 2, 0, -2, -4, , , …

2. V následujících číselných řadách najdi „vetřelce“ a nahraď ho správným číslem:

a) 5, 8, 10, 14, 17, … vetřelec: ____, správně: ____
b) -4, -8, -10, -13, -16, … vetřelec: ____, správně: ____
c) 2, 6, 18, 60, 162, … vetřelec: ____, správně: ____
d) 64, 30, 16, 8, 4, … vetřelec: ____, správně: ____
e) 9, 3, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, … vetřelec: ____, správně: ____

3. Zkoumej řadu: 2, 5, 14, 41, … Řada začíná číslem 2. Které z následujících pravidel použiješ při výpočtu dalších členů této číselné řady?

A) Předchozí člen vynásob 2 a potom přičti 1.
B) K předchozímu členu přičti 1 a potom vynásob 3.
C) Předchozí člen vynásob 3 a potom odečti 1.
D) Od předchozího členu odečti 1 a potom vynásob 3.

4. V následující tabulce je zapsána číselná řada: 4, 7, 10, 13, … Číslo v prvním řádku znamená pořadí čísla v číselné řadě.

1	2	3	4	…	*n*
4	7	10	13	…	

Který z výrazů doplníš do prázdného okénka pro n-té číslo v pořadí:

A) $4n$ B) $3n + 1$ C) $3 \cdot (n + 1)$ D) $5n - 1$

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:
1a) 19, 22;
1b) 12, 17;
1c) 48, 96;
1d) (-6), (-8).
2a) vetřelec: 10, správně: 11;
2b) vetřelec: (-8) , správně: (-7);
2c) vetřelec: 60, správně: 54;
2d) vetřelec: 30, správně: 32;
2e) vetřelec: 0, správně: 1.
3C).
4B).

KOMENTÁŘ: Úlohy vedou žáky k objevení pravidla, které popisuje závislost mezi čísly v řadě hledáním chybějících členů (úloha **1**), porovnáváním sousedních členů (úloha **2**). Vyžadují zobecnění výběrem formulace pravidla slovním vyjádřením (úloha **3**), případně vzorcem (úloha **4**).

4. V úloze získávají žáci zkušenost se vztahem pořadového čísla a hodnotou členu řady. Žáci mohou pravidla formulovat správně i jinak, než je uvedeno a než by pravidlo formuloval učitel. Řešení je třeba se žáky diskutovat. [TIMSS M30 (M07-04)]

2.2.4 FIGURÁLNÍ ČÍSLA

Starověcí obchodníci používali při počítání oblé kamínky. Řecký filosof a matematik Pythagoras začal skládat kamínky do obrazců. Tak vznikla figurální čísla – čtvercová, trojúhelníková, obdélníková, pětiúhelníková, šestiúhelníková, …

Čtvercová čísla

Pokud se kamínky dají uspořádat do čtverce, představuje jejich počet čtvercové číslo.
První čtyři čtvercová čísla jsou na následujícím obrázku:

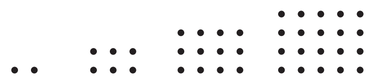
1. 2. 3. 4.

Doplňte tabulku:

Čtvercová čísla	Počet kamínků
1.	1
2.	4
3.	9
4.	…
5.	…
6.	…
50.	…
n-té	…

Obdélníková čísla

Pokud se kamínky dají uspořádat do obdélníku, představuje jejich počet obdélníkové číslo.
První čtyři obdélníková čísla jsou na následujícím obrázku:



1. 2. 3. 4.

Doplňte tabulku:

Obdélníková čísla	Počet kamínků
1.	2
2.	6
3.	12
4.	…
5.	…
6.	…
50.	…
n-té	…

Trojúhelníková čísla

Pokud se kamínky dají uspořádat do trojúhelníku, představuje jejich počet trojúhelníkové číslo.
První čtyři trojúhelníková čísla jsou na následujícím obrázku:

1. 2. 3. 4.

Doplňte tabulku:

Trojúhelníková čísla	Počet kamínků
1.	1
2.	3
3.	6
4.	…
5.	…
6.	…
50.	…
n-té	…

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: Čtvercová čísla: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 2500, n^2 ;

Obdélníková čísla: 2, 6, 12, 20, 30, 42, 2550, $n \cdot (n + 1)$;

Trojúhelníková čísla: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 1275, $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$.

KOMENTÁŘ: Figurální čísla umožní žákům získat představu vztahů mezi čísly a odhalovat pravidelnosti.

2.2.5 VZTAHY V ČÍSELNÝCH ŘADÁCH

1. Najdi aritmetický průměr prvních *n* sudých kladných čísel.

Řeš pro a) $n = 10$, b) $n = 50$, c) n libovolné sudé číslo.
Rada: Průměr čísel 2, 4 je 3; průměr čísel 2, 4, 6 je 4; průměr čísel 2, 4, 6, 8 je 5; …

2. Najdi aritmetický průměr prvních n lichých kladných čísel.

Řeš pro a) $n = 5$, b) $n = 20$, c) n libovolné sudé číslo.

3. Najdi poslední číslice čísel:

a) $6^1, 6^2, 6^3, 6^{37}$
b) $5^1, 5^2, 5^3, 5^{4987}$
c) $4^1, 4^2, 4^3, 4^{317}, 4^{318}$
d) $9^1, 9^2, 9^3, 9^{105}, 9^{106}$
e) $2^1, 2^2, 2^3, 2^{683}, 2^{684}, 2^{685}, 2^{686}$
f) $7^1, 7^2, 7^3, 7^{683}, 7^{684}, 7^{685}, 7^{686}$

4. Najdi poslední dvojčíslí čísel:

a) $5^1, 5^2, 5^3, 5^{4987}$
b) $6^1, 6^2, 6^3, 6^{37}$
c) $11^1, 11^2, 11^3, 11^{10}, 11^{11}, 11^{37}$

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:
1a) 11;
1b) 51;
1c) $n + 1$.
2a) 5;
2b) 20;
2c) n.
3a) 6, 6, 6, 6;
3b) 5, 5, 5, 5;
3c) 4, 6, 4, 4, 6;
3d) 9, 1, 9, 9, 1;
3e) 2, 4, 8, 8, 6, 2, 4;
3f) 7, 9, 3, 3, 1, 7, 9.
4a) 5, 25, 25, 25;
4b) 6, 36, 16, 36,
4c) 11, 21, 31, 01, 11, 71.

KOMENTÁŘ:
1. Když si žák zapíše výsledky prvních výpočtů do tabulky, ihned vidí výsledek.

Počet čísel	1	2	3	4	5	…	10	…	50	…	n		
Průměr	2	3	4	5	6	…	11	…	51	…	$n + 1$		

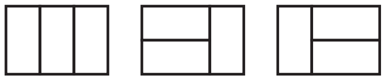
4c) Výsledek vyjádřený tabulkou má následující tvar.

Počet čísel	1	2	3	4	5	…	9	10	11	12	13	…	37
Průměr	11	21	31	41	51	…	91	01	11	21	31	…	71

Žáci si mohou pomáhat manipulací (dají se využít například fazole), grafickým znázorněním, tabulkami.

2.2.6 FIBONACCIHO ŘADA

1. Na obrázku vidíme, jak lze obdélník 3 × 2 třemi různými způsoby rozložit na obdélníky 2 × 1.



a) Ukaž, že obdélník 4 × 2 lze právě pěti různými způsoby rozložit na obdélníky 2 × 1.
b) Kolika různými způsoby lze na obdélníky 2 × 1 rozložit obdélník 5 × 2?
c) Stejnou úlohu řeš pro obdélníky 6 × 2; 7 × 2; 8 × 2; 9 × 2.
c) Všechny získané výsledky zapiš do tabulky.

n	3	4	5	6	7	8	9
Počet způsobů	3	5					

Řadu čísel, kterou vidíme ve druhém řádku a která pokračuje dále, zkoumal poprvé středověký italský matematik Leonardo Pisano (Fibonacci), který žil v letech asi 1180–1250. Na jeho počest je tato řada nazývána Fibonacciho řada.

2. Formuluj pravidlo, podle kterého můžeš jednoduše počítat další členy z předchozí úlohy (členy tzv. Fibonacciho řady).

3. Najdi takové tři po sobě jdoucí členy Fibonacciho řady a, b, c, pro které je rozdíl čísel ac a b^2 větší než 5.

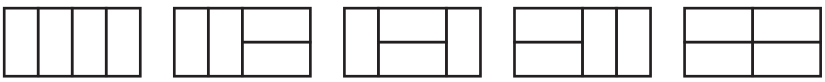
4. Kolika způsoby lze rozložit obdélník n × 3 na obdélníky 3 × 1? Zkoumej nejprve pro n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Výsledky svého zkoumání zaznamenej do tabulky. Odhal pravidelnost.

5. Zjisti, která čísla Fibonacciho řady jsou

a) sudá; b) lichá; c) dělitelná třemi; d) dělitelná pěti.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1a), b)** a **c)** viz **d)**



n	3	4	5	6	7	8	9
Počet způsobů	3	5	8	13	21	34	55

2. Pravidlo: Každý další člen je součtem dvou předchozích.
3. Taková trojice neexistuje, protože daný rozdíl je vždy 1.
4. První tři členy řady jsou 1, 1, 2. Pro každé čtyři po sobě jdoucí členy a, b, c, d platí: $d = c + 2a$.
5a) Sudé je počínaje číslem 2 každé třetí číslo ($3k + 2$);
5b) Lichá jsou $3k$ a($3k + 1$);
5c) Dělitelné třemi je počínaje číslem 3 každé čtvrté (zbytky při dělení 3 této řady jsou 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, … Je to s periodou 8.);
5d) Dělitelné pěti je každé páté počínaje číslem 5. Napíšeme-li řadu zbytků při dělení 5, pak ta je opět periodická s periodou 20. (U dělitelnosti 4 má perioda délku 6.)

KOMENTÁŘ: Úlohy o Fibonacciho číslech jsou přitažlivé zejména pro žáky, kteří mají rádi číselné zajímavosti. Fibonacciho posloupnost umožňuje experimentálně odhalit například to, že každé páté číslo je dělitelné 5, a pak hledat cestu, jak toto pozorování dokázat. Podíváme-li se na zbytky čísel Fibonacciho posloupnosti při dělení číslem 5, nacházíme posloupnost 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 0, …

2.2.7 DALŠÍ ŘADY

1. **Budeme zkoumat řadu: 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, …**

   a) Vezmi tři po sobě jdoucí členy dané řady a, b, c. Najdi číslo $a + c - 2b$. Co pozoruješ?
   b) Najdi další tři členy uvedené řady.
   c) Vysvětli, jak jsi tvořil další členy.

2. **Zvolíme libovolné čtyřciferné číslo 5 143. U něj vytvoříme další dvě čísla přeskupením číslic: největší 5 431 a nejmenší 1 345. Najdeme jejich rozdíl: 3 086. S tímto číslem předchozí postup opakujeme: 8 630 – 368 = 8 262, 8 622 – 2 268 = 6 354. Postupujeme takto dále a dostáváme tak řadu čísel: 5 143, 4 086, 8 172, 7 443, ….**

   a) Najdi dvacáté číslo této řady.
   b) Stejnou úlohu řeš v případě, že první číslo bude 4 178.
   c) Najdi čtyřciferné číslo, ze kterého uvedeným způsobem vytvořená řada má dvacáté číslo různé od 6 174.
   d) Najdi všechna čísla poslední řady, která jsou dělitelná číslem 9.

3. **Řada 2, 5, 11, 23, … byla vytvořena podle pravidla. Další člen řady dostaneme tak, že:**

   A) k předchozímu členu přičteme 1 a potom vynásobíme číslem 2,
   B) předchozí člen vynásobíme číslem 2 a potom přičteme 1,
   C) předchozí člen vynásobíme číslem 3 a potom odečteme 1,
   D) od předchozího členu odečteme 1 a potom vynásobíme číslem 3.

4. **Řada čísel 16, 13, 7, 14, 9, … je tvořena takto: První číslo je zvoleno a každé následující se dostane z předchozího podle pravidla: počet desítek plus dvojnásobek počtu jednotek (tedy po čísle 16 následuje číslo 1 + 2 · 6 = 13; po něm následuje číslo 1 + 2 · 3 = 7; po něm číslo 0 + 2 · 7 = 14; …).**

   a) Zjisti, jaké číslo je v této řadě na stém místě.
   b) Řeš úlohu, je-li první číslo 18.
   c) Řeš úlohu, je-li první číslo 95.
   d) Jak je nutno volit první číslo, aby páté číslo řady bylo 19?

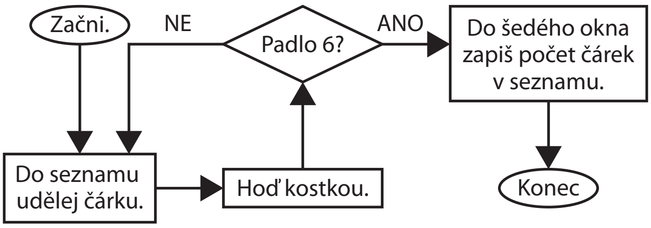
✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1a) Toto číslo je konstantní a rovná se 4.
1b) 161, 199, 241;
1c) Vysvětleno tímto schématem: 7 17 31 49 71
+ 10 + 14 + 18 + 22 + 26
+ 4 + 4 + 4 + 4 + 4
Toto vysvětlení je procesuální. Náročné konceptuální vysvětlení je dáno formulí pro n-tý člen: $a_n = 2n^2 + 4n + 1$.
2a) 3 996, 6 264, 4 176, 6174 a dále se bude toto číslo opakovat.
2b) 4178, 7263, 5265, 3996, 5 265, 3 996, …;
2c) takových čísel je 9 a jsou to čísla 1 111, 2 222, …, 9 999;
2d) jsou to všechna čísla řady kromě prvního.
3B).
4a) na stém místě je 9;
4b) na stém místě je 3;
4c) číslo 19 je na druhém a každém dalším místě;
4d) nutno volit jakýkoliv dvoumístný násobek 19, tedy 19, 38, 57, 76, 95.

2.2.8 VÝVOJOVÝ DIAGRAM

1. Na obrázku 1 je vývojový diagram. Házej kostkou a postupuj podle programu.

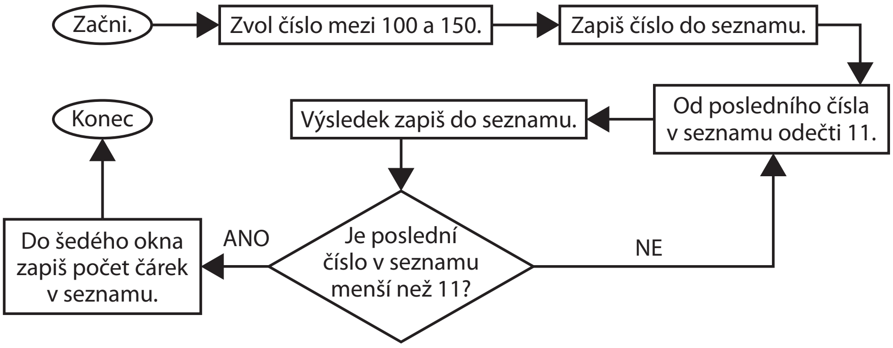


Obr. 1

Seznam: ……..……… …..

Co znamená, když jsou nakonec v seznamu a) 4 čárky, b) 1 čárka, c) 8 čárek?

2.



Obr. 2

a) Podle vývojového diagramu na obrázku 2 dokonči seznam.

Seznam: 134, 123, 112, ……………………………………………… …..

b) Zvol první číslo tak, aby poslední číslo seznamu bylo 10.

c) Zvol první číslo tak, aby v šedivém rámečku bylo číslo 14.

3. Vytvoř řadu: Zvol dvouciferné přirozené číslo a zapiš jej do seznamu. Dále doplňuj seznam podle tohoto návodu: Jestliže poslední číslo seznamu je menší než 31, přičti k němu 18 a toto číslo zapiš do seznamu. Jestliže poslední číslo seznamu je větší než 30, odečti od něj 30 a toto číslo zapiš do seznamu. Jestliže poslední číslo je už zapsáno v seznamu, proces končí. Nakresli vývojový diagram, který tuto řadu vytvoří.

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

VÝSLEDKY:

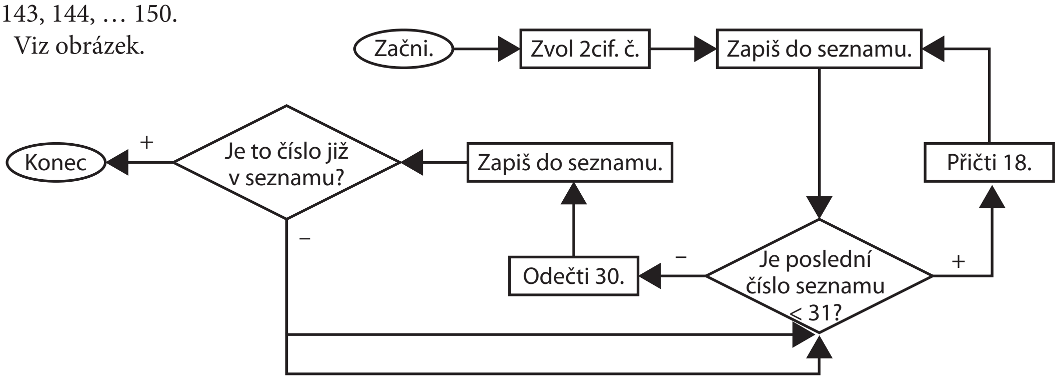
1. Šestka padla při a) čtvrtém; b) prvním; c) osmém hodu.

2a) Seznam: 134, 123, 112, 101, 90, 79, 68, 57, 46, 35, 24, 13, 2 $\boxed{13}$;

2b) 109, 120, 131 a 142;

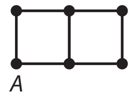
2c) 143, 144, … 150.

3. Viz obrázek.

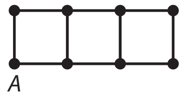


2.2.9 ŘADY V GEOMETRII

1. Na obrázku 1 hledej pravoúhlé trojúhelníky *ABC*, které mají vrcholy *B*, *C* v některých z pěti vyznačených bodů. Popis vrcholů *A*, *B*, *C* je proti směru pohybu hodinových ručiček. Počet těchto trojúhelníků označ *t*.



Obr. 1



Obr. 2

a) Najdi t.
b) Stejnou úlohu řeš pro obdélník 3×1, který je na obrázku 2.
c) Stejnou úlohu řeš pro obdélník 4×1, který si nakresli.
d) Obdobně řeš pro další obdélníky $n \times 1$, kde $n = 5, 6, 7, 8, 9, \dots$
e) Čísla t zjištěná pro obdélníky $n \times 1$, kde $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ zapiš do tabulky.

n	2	3	4	5	6	7	8	9				…..	20	…..	51
t															

f) Napiš pravidlo, podle kterého můžeš pro libovolné přirozené číslo n určit číslo t.

2. Stejnou úlohu řeš v případě, že místo pravoúhlých trojúhelníků budeš hledat rovnoramenné trojúhelníky.

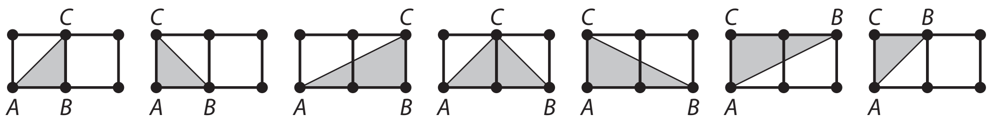
n	1	2	3	4	5	…..	*n*
t							

3. Stejnou úlohu řeš v případě, že místo pravoúhlých trojúhelníků budeš hledat tupoúhlé trojúhelníky.

n	1	2	3	4	5	…..	*n*
t							

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1a)** 7, viz obrázek; **b), c), d)** a **e)** viz tabulka; **f)** $t = 3n + 1$, pro $n > 1$.



n	2	3	4	5	6	7	8	…..	20	…..	151
t	7	10	13	16	19	22	25		61		454

2. Dolní řádek tabulky je: 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6...; $t = [\frac{n}{2}] + 3$, pro $n > 0$.

3. Dolní řádek tabulky je: 0, 2, 8, 17, 29, 44 ...; $t = \frac{3}{2}(n^2 - n) - 1$, pro $n > 1$.

KOMENTÁŘ: Komplexní úlohy, které propojují geometrii trojúhelníka s kombinatorikou a řadami čísel.

1. Úloha seznamuje žáky s prostředím, v němž budou pracovat, pomáhá objevovat rytmus číselné řady. Žáci nacházejí pravidlo.

2. Náročnější varianta. Zde žáky čeká překvapení – dvě čísla se opakují (přidáním lichého čtverce další rovnoramenný trojúhelník nepřibude). Z toho plyne, že obecný zápis výsledku musí použít méně frekventovaný symbol [] – celá část čísla. Žákům je více srozumitelný zápis, který zvlášť vyjadřuje sudá čísla a zvlášť lichá. Pro sudá n je $t = \frac{n}{2} + 3$, pro lichá n je $t = \frac{(n-1)}{2} + 3$.
Šikovným žákům je možné dát podobné úlohy pro větší obdélníky. Místo obdélníku $n \times 1$, který zde zkoumáme, lze vzít obdélníky $n \times 2$, nebo dokonce $n \times 3$.

2.2.10 SOUČET ARITMETICKÉ ŘADY

Když bylo Gaussovi 10 let, dostala jeho třída úmornou úlohu: Sečti sto prvních přirozených čísel: 1 + 2 + 3 + 4 + … + 100 = ?. Gauss zjistil, že když sečte první a poslední, druhé a předposlední číslo atd., najde součet velice rychle.

1. Najdi součty 1 + 2 = ?, 1 + 2 + 3 = ? …

Zaznamenej výsledky do tabulky a hledej pravidelnost.

Počet přirozených čísel	1	2	3	4	5	6	7	100	*n*
Součet	1	3							

2. Najdi součet prvních padesáti lichých čísel. Sčítej postupně jedno, dvě, tři… lichá čísla, dokud neobjevíš pravidelnost.

1 = 1 1 + 3 = 4 1 + 3 + 5 = ? 1 + 3 + 5 + 7 = ?

Výsledky zaznamenávej do tabulky:

Počet lichých čísel	1	2	3	4	5	6	7	50	*n*
Součet	1	4							

3. Zjisti součet prvních n sudých kladných čísel.

2 + 4 + 6 + 8 + 10 + … + 100 = ?

4. Součet několika (aspoň dvou) po sobě jdoucích lichých čísel je a) 24, b) 105. Najdi ta čísla. Úloha a) má dvě a úloha b) tři řešení.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

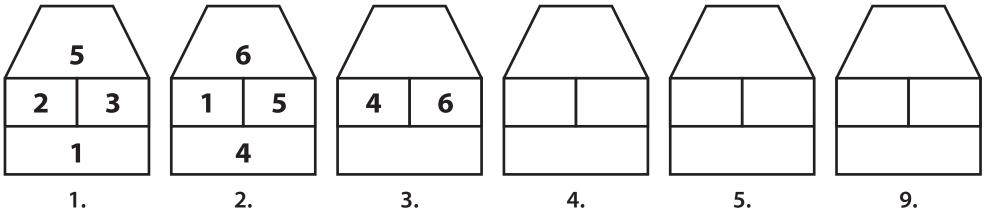
1. Druhý řádek tabulky: Součet: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 5 050, $(n + 1) \cdot \frac{n}{2}$.
2. Součet. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 2 500, n^2.
3. Součet prvních padesáti kladných sudých čísel je 2 550. Součet prvních *n* sudých čísel je $n \cdot (n + 1)$.
4a) první řešení: 11, 13; druhé řešení: 3, 5, 7, 9;
4b) první řešení: 9, 11, …, 19, 21; druhé řešení: 17, 19, …, 23, 25; třetí řešení: 33, 35, 37.

KOMENTÁŘ: Úlohy jsou příbuzné k úlohám z podkapitol 2.2.4 a 2.2.5. Vedou k vyhledávání pravidelností a k vyvození vztahu vyjádřeného vzorcem pomocí proměnných – viz např. úloha M28 (M02-07) v šetření TIMSS 2007, jejíž část C byla pro české žáky velmi obtížná.
Při řešení úlohy **1** mohou žáci odhalit, že ve sloupci součtů vznikají trojúhelníková čísla, v tabulce úlohy **2** pro lichá čísla jsou součty čísla čtvercová, v úloze **3** vznikají čísla obdélníková.

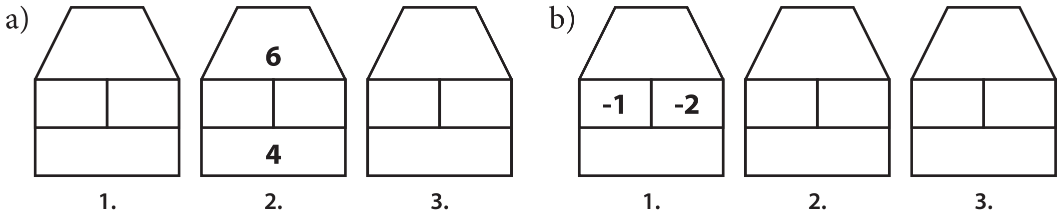
2.2.11 **ŘADY „DOMEČKŮ"**

V prvním domečku v patře bydlí dvě čísla. Na půdu se nastěhuje jejich součet a do sklepa jejich rozdíl. Do druhého domečku se čísla z půdy a ze sklepa nastěhují do patra a opět se na půdu nastěhuje jejich součet a do sklepa jejich rozdíl a tak to stále pokračuje. V každé úloze doplň do domečků scházející čísla.

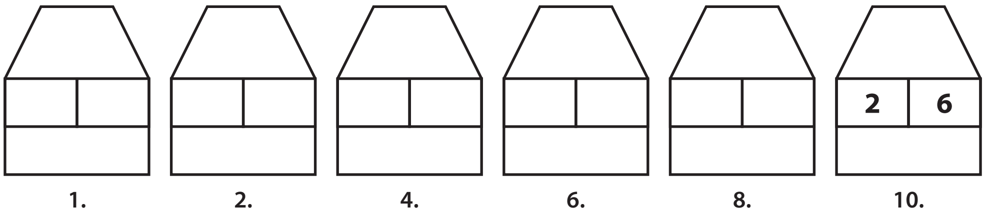
1.



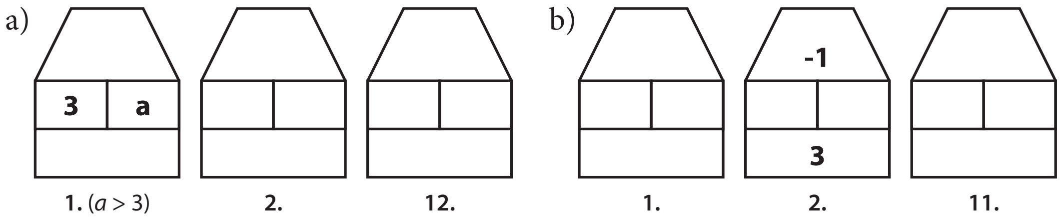
2.



3.



4.



✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. domeček – patro (**d**), půda (**p**), sklep (**s**).
1. d = 2, 3, p = 5, s = 1; *2.* d = 1, 5, p = 6, s = 4; *3.* d = 6, 4, p = 10, s = 2;
4. d = 2, 10, p = 12, s = 8; *5.* d = 12, 8, p = 20, s = 4; *9.* d = 48, 32, p = 80, s = 16.

2a) *1.* d = 2, 3, p = 5, s = 1; *2.* d = 1, 5, p = 6, s = 4; *3.* d = 6, 4, p = 10, s = 2;

2b) *1.* d = -1, -2, p = -3, s = 1; *2.* d = 1, -3, p = -2, s = 4; *3.* d = -2, 4, p = 2, s = 6.

3. *1.* d = 0,25, 0,125, p = 3,75, s = 0,125; *2.* d = 0,125, 0,375, p = 0,5, s = 0,25;
4. d = 0,25, 0,75, p = 1, s = 0,5; *6.* d = 0,5, 1,5, p = 2, s = 1; *8.* d = 1, 3, p = 4, s = 2;
10. d = 2, 6, p = 8, s = 4.

4a) *1.* d = a, 3, p = 3 + a, s = a – 3; *2.* d = 3 + a, a – 3, p = 2a, s = 6;
12. d = 32a + 96, 32a – 96, p = 64a, s = 192;

4b) *1.* d = -1,5, -0,5, p = -2, s = 1; *2.* d = 1, -2, p = -1, s = 3; *11.* d = -16, 48, p = 32, s = 64.

KOMENTÁŘ: Všechny tyto úlohy provází a řešiteli zjednodušuje práci pravidlo: dvojnásobek domečku s pořadovým číslem n je domeček s pořadovým číslem n + 2.

2.3 VÝRAZY

2.3.1 SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY

1. Doplň součtové trojúhelníky tak, že nad každou dvojicí sousedních výrazů je jejich součet.

$x + 4$	$2x + 2$	$7 - 3x$	$x - 3$

$7x + 20$			
	$4x + 4$		
	$3x + 7$		$2 - 7x$

2. Doplň součtové trojúhelníky.

		$12x + 1$		
$x + 4$	$2x + 6$	$3x + 7$		$6 - 9x$

$8x + 23$		$12x - 1$		
$4 - x$		$3x + 7$		$7x - 2$

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

$28 - x$			
$2x + 15$	$13 - 3x$		
$3x + 6$	$9 - x$	$4 - 2x$	
$x + 4$	$2x + 2$	$7 - 3x$	$x - 3$

$7x + 20$			
$9x + 17$	$-2x + 3$		
$5x + 13$	$4x + 4$	$-6x - 1$	
$2x + 6$	$3x + 7$	$x - 3$	$2 - 7x$

$66x + 52$				
$35x + 37$	$31x + 15$			
$8x + 23$	$17x + 14$	$12x + 1$		
$3x + 10$	$5x + 13$	$12x + 1$	0	
$x + 4$	$2x + 6$	$3x + 7$	$9x - 6$	$6 - 9x$

$40x + 56$				
$18x + 40$	$22x + 16$			
$8x + 23$	$10x + 17$	$12x - 1$		
$2x + 10$	$6x + 13$	$4x + 4$	$8x - 5$	
$4 - x$	$3x + 6$	$3x + 7$	$x - 3$	$7x - 2$

KOMENTÁŘ: Součtové trojúhelníky, které zde mají tvar pyramidy, jsou někdy kresleny ve tvaru hroznů, kde se sčítá shora dolů. Ve sbírce pro 4. ročník jsou na straně 1.4.4 součtové trojúhelníky orientované jako hrozny. Horní dvě úlohy jsou jednoduché, stačí doplňovat ke dvěma známým výrazům jejich součet, resp. rozdíl. Levá dolní pyramida přináší náročnější úkol. Neexistuje žádná přímá cesta výpočtu od dolní řádky, od výrazů $3x + 7$ a $6 - 9x$ k výrazu $12x + 1$. Žáci budou postupovat metodou pokus omyl. Učitel jim může poradit, aby do prázdného pole v dolní řádce napsali výraz $ax + b$ a hledali, jak volit a, b, abychom o dvě patra výše dospěli k výrazu $12x + 1$.
Výpočet s výrazem $ax + b$ vede na výrazy $3x + 7 + ax + b$ a výraz $6 - 9x + ax + b$ ve čtvrtém řádku (odshora). Součet těchto dvou výrazů je $12x + 1$, odkud $a = 1$ a $b = -3$. Podobně obtížná je poslední úloha, kde je potřeba hledat výraz v dolní řádce. Sledujeme žákovské strategie. Necháme žáky prezentovat svůj postup. Učitel může poradit žákům, že je možné si pyramidu rozložit na dvě, jednu s absolutními členy a druhou s lineárními členy (koeficienty u x).

2.3.2 SLOVNÍ ÚLOHY S PARAMETRY

1. **Na dvoře je několik koz a několik slepic. Dohromady mají h hlav. Slepic je s. Kolik nohou mají dohromady všechny slepice a kozy? Počet nohou je roven**

A) $2s + 4h$ B) $3h$ C) $2 \cdot (h + s)$ D) $4h - 2s$

2. **Slámovi mají tři děti. Součet jejich let je n. Součet let obou rodičů je $3n$. Za k let bude součet let obou rodičů stejný jako součet let tří dětí. Za těchto podmínek platí**

A) $3n = 2k$ B) $2n = k$
C) $n = 3k$ D) žádný z uvedených vztahů

3. **Ve třídě byli hoši a dívky. Hochů bylo o n víc než dívek. Pak přišlo do třídy ještě m hochů a $4m$ dívek. Teď je ve třídě stejně hochů jako dívek. Za těchto podmínek platí**

A) $n = 3m$ B) $n = 4m$
C) $n = 2m$ D) žádný z uvedených vztahů

4. **V roce 2000 nás v domě bydlelo 6 a součet našich věků byl p let. V roce 2001 se bratr Ivo oženil a odešel z našeho domu. V roce 2002 nás bydlelo v domě již jen 5 a součet našich věků byl q let. Ve kterém roce se bratr Ivo narodil? Bylo to v roce _______ .**

5. **Slámovi mají 4 děti. Součet jejich let je n a součet let rodičů je $3n$. Za k let bude součet let obou rodičů stejný jako součet let 4 jejich dětí. Najděte vztah mezi čísly n a k.**

6. **Na první zastávce do autobusu nastoupilo c cestujících. Na každé další přistoupilo d cestujících a žádný nevystoupil. Když autobus vyjížděl z páté zastávky, bylo v něm již 52 cestujících. Jak najdu číslo c, když znám číslo d?**

7. **Věkový průměr 4 kamarádů je p, věkový průměr tří nejstarších z nich je q. Kolik let má nejmladší z kamarádů?**

8. **Dva jogurty a jedno mléko stojí m Kč. Jeden jogurt a dvě mléka stojí n Kč. Dva jogurty stojí stejně jako tři mléka. Jaký je vztah mezi čísly m a n?**

9. **Na zahradě je p žáků a ve třídě je $2p$ žáků. Když m žáků přejde ze třídy na zahradu, bude na zahradě stejně žáků jako ve třídě. Znám číslo m, jak najdu číslo p?**

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1D).
2B).
3A).
4. Bylo to v roce $1990 - p + q$.
5. $n = k$.
6. $c = 52 - 4d$.
7. Nejmladšímu je $4p - 3q$ let.
8. $7m = 8n$.
9. $p = 2m$.

2.3.3 VZTAHY MEZI PŘIROZENÝMI ČÍSLY

1. **Napiš číslo 5 416 jako součet 4 po sobě jdoucích lichých čísel.**

2. **Dané číslo zapiš jako součet několika po sobě jdoucích přirozených čísel. Najdi všechna řešení.**

   10 =
   15 =
   126 =
   334 =

3. **Najdi všechna přirozená čísla *n*, která lze psát jako součet čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel.**

4. **V billiáru se všechny barevné koule vkládají do plastového trojúhelníku, který má čtyři řady.**
   a) Kolik je koulí celkem?
   b) Kolik koulí potřebujeme, když chceme vytvořit co nejmenší trojúhelník, který má 5 řad?
   c) Kolik koulí potřebujeme, když chceme vytvořit co nejmenší trojúhelník, který má 20 řad?

5. **Kolik existuje obdélníků nebo čtverců s celočíslenými stranami a obvodem *n*? Řeš pro všechna přirozená čísla *n*.**

✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

VÝSLEDKY:

1. 5 416 = 1 351 + 1 353 + 1 355 + 1 357.
2. 10 = 1 + 2 + 3 + 4 (jediné řešení);
15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5;
15 = 4 + 5 + 6;
15 = 8 + 7 (tři řešení);
126 = 41 + 42 + 43,
126 = 30 + 31 + 32 + 33;
126 = 15 + 16 + 17 +18 +19 +20 + 21;
126 = 10 + 11 +12 + 13 + 14 + 15 + 16+ 17 + 18;
126 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 +16 (pět řešení).
334 = 82 + 83 + 84 + 85 (jediné řešení).
3. $n = 6 + 4k$, k je přirozené číslo.
4a) 10;
4b) 15;
4c) 210.
5. Je-li číslo n liché, obdélník neexistuje žádný. Je-li n dělitelné 4, obdélníků je $\frac{n}{4}$. Když má n tvar $4k + 2$, pak je obdélníků k.

KOMENTÁŘ:

1. Protože 5 416 : 4 = 1 354, jsou hledaná čísla rozmístěna kolem tohoto jejich aritmetického průměru.
2. Úloha se vrací k úloze **4** na straně 2.2.10. Zde je bohatší a náročnější.
3. Je zajímavé, že výsledek této úlohy nezávisí na tom, zda nulu považujeme za přirozené číslo. Když 0 považujeme za přirozené číslo, pak součet prvních čtyř přirozených čísel je 0 + 1+ 2+ 3 = 6 a $6 = 6 + 4 \cdot 0$. Když 0 nepovažujeme za přirozené číslo, pak součet prvních čtyř přirozených čísel je 1+ 2+ 3 + 4 = 10 a $10 = 6 + 4 \cdot 1$. Odpověď $n = 10 + 4k$ tedy správná není, ale nejedná se o závažnou chybu.
4. Otevíráme novou interpretaci trojúhelníkových čísel (viz též 2.2.4).

2.3.4 **VÝRAZY**

1. **Který výraz se rovná výrazu $4x^2 \cdot 9x$?**

   A) $13x^2$ B) $13x^3$ C) $36x^2$ D) $36x^3$

2. **Do dané rovnosti doplň za * čísla tak, aby rovnost byla pravdivá.**

   a) $7(a - b) + * \cdot b = * \cdot a$
   b) $3u \cdot (u - * \cdot v) = * \cdot u^2 - 6uv$
   c) $(2c - * \cdot d) \cdot 6 + 10d = * \cdot c - 8d$
   d) $5x \cdot (y + 4) - * \cdot x = * \cdot xy$

3. **Do dané rovnosti doplň za ? výraz tak, aby rovnost byla pravdivá.**

   a) $(5x^2 - 4xy + y^2 + 7xy) + (3y^2 - 2xy) = x^2 + xy - 4 + ?$
   b) $m^2 \cdot (m + n - 4) = m^3 - 4 + ?$
   c) $(a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) = a^4 - a^2b^2 + ?$

4. **Do výrazu $4x \cdot (1 - y) + 4y - 3(y + x) + 4xy$ dosaď za proměnné x a y čísla z tabulky a doplň odpovídající hodnoty výrazu.**

x	1	1	3	-2	5	11	79
y	1	-1	2	3	7	19	21
hodnota výrazu							

5. **Z dané trojice výrazů: I. $3x - y$; II. $2y - x$ a III. $y - x$ vyber dva tak, aby**

   a) součtem těchto výrazů byl výraz $2x$,
   b) odečtením druhého výrazu od prvního vznikl výraz $-y$.

✂ --- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ --- ✂

VÝSLEDKY:
1D).
2a) 7, 7;
2b) 2, 3;
2c) 3, 12;
2d) 20, 5.
3a) $4x^2 + 4y^2 + 4$;
3b) $m^2n + 4 - 4m^2$;
3c) $-b^4 + a^2b^2$.
4. dolní řádek tabulky: 2, 0, 5, 1, 12, 30, 100.
5a) I + III;
5b) III – II.

KOMENTÁŘ: Úlohy jsou blízké k úlohám TIMSS M31 až M34. Jsou víceméně standardní.

2.3.5 ZOBECŇOVÁNÍ

V každé z úloh proveď nejprve čtyři lehčí výpočty a na základě těchto výsledků odhadni, čemu je roven poslední výraz.

1. Vypočítej:

$\frac{(2+4)}{3} = \_\_\_$, $\frac{(2+4+6)}{4} = \_\_\_$, $\frac{(2+4+6+8)}{5} = \_\_\_$, $\frac{(2+4+6+8+10)}{6} = \_\_\_$

Odhadni: $\frac{(2+4+6+\ldots+98+100)}{51} = \_\_\_$

2. Vypočítej:

$10101 : 3 = \_\_\_$, $1001001 : 3 = \_\_\_$, $100010001 : 3 = \_\_\_$, $10000100001 : 3 = \_\_\_$

Odhadni: $1000000000010000000001 : 3 = \_\_\_$

3. Vypočítej:

$\frac{1}{(1\cdot 2)} = \_\_\_$, $\frac{1}{(1\cdot 2)} + \frac{1}{(2\cdot 3)} = \_\_\_$, $\frac{1}{(1\cdot 2)} + \frac{1}{(2\cdot 3)} + \frac{1}{(3\cdot 4)} = \_\_\_$,

$\frac{1}{(1\cdot 2)} + \frac{1}{(2\cdot 3)} + \frac{1}{(3\cdot 4)} + \frac{1}{(4\cdot 5)} \ldots = \_\_\_$

Odhadni: $\frac{1}{(1\cdot 2)} + \frac{1}{(2\cdot 3)} + \frac{1}{(3\cdot 4)} + \frac{1}{(4\cdot 5)} + \ldots + \frac{1}{(99\cdot 100)} = \_\_\_$

4. Vypočítej:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \_\_\_$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \_\_\_$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \_\_\_$,
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \_\_\_$

Odhadni: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{1024} = \_\_\_$

Poznámka: $1\,024 = 2^{10}$

5. Vypočítej:

$\frac{1^2}{1} = \_\_\_$, $\frac{(1^2+2^2)}{(1+2)} = \_\_\_$, $\frac{(1^2+2^2+3^2)}{(1+2+3)} = \_\_\_$, $\frac{(1^2+2^2+3^2+4^2)}{(1+2+3+4)} = \_\_\_$

Odhadni: $\frac{(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+100^2)}{(1+2+3+4+\ldots+100)} = \_\_\_$

6. Vypočítej:

$\frac{1^3}{1^3} = \_\_\_$, $\frac{(1^3+2^3)}{(1+2)^2} = \_\_\_$, $\frac{(1^3+2^3+3^3)}{(1+2+3)^2} = \_\_\_$, $\frac{(1^3+2^3+3^3+4^3)}{(1+2+3+4)^2} = \_\_\_$

Odhadni: $\frac{(1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+100^2)}{(1+2+3+4+\ldots+100)^2} = \_\_\_$

7. Odhadni:

$(2\cdot 10^{20} + 3\cdot 10^{10} + 4) : 9 = \_\_\_$

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:

1. výpočty: 2, 3, 4, 5; odhad: 50.

2. výpočty: 3 367, 333 667, 33 336 667, 3 333 366 667; odhad: 3 333 333 333 366 666 666 667.

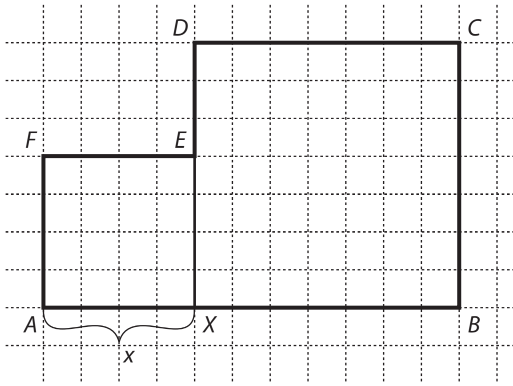
3. výpočty: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$; odhad: $\frac{99}{100}$. **4.** výpočty: $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}$; odhad: $\frac{1023}{1024}$.

5. výpočty: $\frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}$; odhad: $\frac{201}{3} = 67$. **6.** výpočty: 1, 1, 1, 1; odhad: 1.

7. výpočty: 234 : 9 = 26, 20 304 : 9 = 2256, 2 003 004 : 9 = 222 556, 200 030 004 : 9 = 22 225 556; odhad: $(2\cdot 1020 + 3\cdot 1010 + 4) : 9 = 22\ldots 255\ldots 56$, kde je 10 dvojek, pak 9 pětek a nakonec jedna šestka.

2.3.6 OBSAH, OBVOD ŠESTIÚHELNÍKA

Na obrázku je znázorněn šestiúhelník *ABCDEF*, který je složen ze dvou čtverců *AXEF* a *XBCD*. Délka úsečky *AB* je 11 ($|AB| = 11$). Bod *X* se pohybuje po úsečce *AB*. Jeho vzdálenost od bodu *A* je *x*. V závislosti na *x* budeme počítat obvod *o*, obsah *S* šestiúhelníka *ABCDEF* a součet úhlopříček $u = |AE| + |BD|$.



1.

a) Do tabulky dopiš čísla do sloupce *o*.
b) Nakresli graf závislosti obvodu *o* na *x* nejdříve pro $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$ a pak jej doplň pro všechna *x*, $0 \leq x \leq 11$.
c) Z grafu urči, pro jaké *x* bude obvod *o* nejmenší a jaký je obvod *o* pro $x = 7{,}5$.
d) Vyjádři obvod *o* pomocí *x*, pro $0 \leq x \leq 5{,}5$ i pro $5{,}5 \leq x \leq 11$.

x	*o*	*S*	*u*
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

2.

a) Doplň sloupec *S* v tabulce.
b) Nakresli graf závislosti obsahu *S* na *x* nejdříve pro $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$ a pak jej doplň pro všechna *x*, $0 \leq x \leq 11$.
c) Z grafu odhadni, pro jaké *x* bude obsah *S* nejmenší a jaký je obsah *S* pro $x = 7{,}5$.
d) Vyjádři obsah *S* pomocí *x*.

3.

a) Doplň sloupec *u* v tabulce.
b) Nakresli graf závislosti *u* na *x* pro $0 \leq x \leq 11$.

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY:

1a) První sloupec tabulky, *o*: 44 (čtverec), 42, 40, 38, 36, 34, 34, 36, 38, 40, 42, 44 (čverec);
1b) Grafem je sjednocení dvou úseček. Jedna má krajní body v bodech [0; 44] a [5,5; 33], druhá v [5,5; 33] a [11; 44];
1c) Obvod bude nejmenší pro $x = 5{,}5$. Pro $x = 7{,}5$ je $o = 37$;
1d) $o = 44 - 2x$, pro $x \in \langle 0; 5{,}5 \rangle$ a $o = 2x + 22$, pro $x \in \langle 5{,}5; 11 \rangle$. Tento popis funkce lze zapsat jediným výrazem $o = 33 + 2\,|x - 5{,}5|$.
2a) Druhý sloupec tabulky *S*: 121 (čtverec), 101, 85, 73, 65, 61, 61, 65, 73, 85, 101, 121 (čtverec);
2b) Graf je parabola, $S = x^2 + (11 - x)^2$;
2c) Obsah bude nejmenší pro $x = 5{,}5$, $S = 60{,}5$. Pro $x = 7{,}5$ je $S = 68{,}5$;
2d) $S = x^2 + (11 - x)^2$.
3a) Třetí sloupec tabulky, $u = 11 \cdot \sqrt{2}$ pro všechna *x*;
3b) Graf je grafem konstantní funkce, tedy přímka rovnoběžná s osou *x*.

2.4 ROVNICE, VZORCE

2.4.1 SLOVNÍ ÚLOHY

1. **Jarda s Davidem trénují trestná střílení na florbalový turnaj. Jarda dal o 18 gólů více než David. Celkem dali 86 gólů. Kolik gólů dal Jarda a kolik David?**

2. **Aleš a Patrik mají ve svých MP4 přehrávačích dohromady 72 nahrávek. Aleš jich má dvakrát tolik, co Patrik. Kolik nahrávek má ve svém přehrávači Aleš?**

3. **V Zedlandu používali obchodníci tři platidla: bedy, medy a zedy. Za dva zedy je 5 bedů, za tři bedy jsou 2 medy, kolik medů je za tři zedy?**

4. **Linda šetří pětikoruny a dvoukoruny. Má už 11 mincí. Kolik dvoukorun a pětikorun má, když už ušetřila 49 Kč?**

5. **Délka obdélníku je o 4 cm větší než dvojnásobek jeho šířky. Obvod je 212 cm. Urči obsah obdélníku.**

6. **Nádoba s vodou měla hmotnost 13 kg. Po odlití čtvrtiny množství vody byla její hmotnost 10 kg. Urči hmotnost prázdné nádoby.**

7. **Matce je 48 roků, synovi 18 let.**

   a) Před kolika lety byla matka čtyřikrát starší než syn?
   b) Před kolika lety byla matka třikrát starší než syn?
   c) Za kolik let bude matka dvakrát starší než syn?

8. **Otci je 56 let, jeho synům 22 let a 16 let. Za kolik let bude otci tolik, jako oběma synům dohromady?**

9. **Myslím si číslo. Když k němu přičtu 9, pak ho vynásobím třemi, pak odečtu 61, dostanu zase to myšlené číslo. Jaké číslo si myslím?**

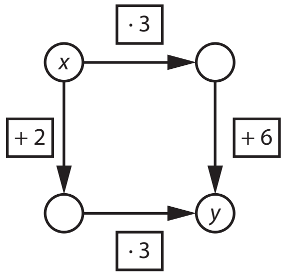
✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. Jarda 52, David 34.
2. Aleš 48.
3. 5 medů.
4. 9 pětikorun a 2 dvoukoruny.
5. 2 448 cm^2. 34 cm, 72 cm.
6. 1 kg.
7a) před 8 lety;
7b) před 3 lety;
7c) za 12 let.
8. za 18 let.
9. 17.

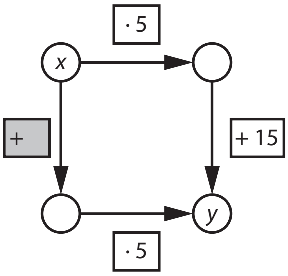
2.4.2 ŠIPKOVÉ GRAFY I

Když v tomto grafu zvolím číslo x, mohu k číslu y dojít buď severo-východní cestou (x násobím 3 a pak přičtu 6), nebo západo-jižní cestou (k x přičtu 2 a výsledek vynásobím 3). V obou případech získám stejný výsledek. V algebraickém zápisu se jedná o rovnost výrazů: $3x + 6 = 3(x + 2)$.

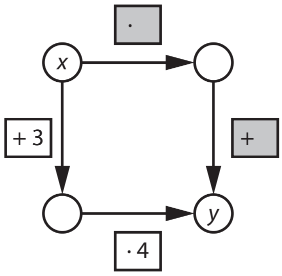


1. Do šedivých polí šipkového grafu a), b), c) doplň čísla tak, aby grafem byla zapsána rovnost výrazů.

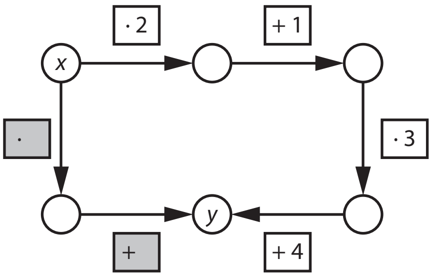
a)



b)



c)



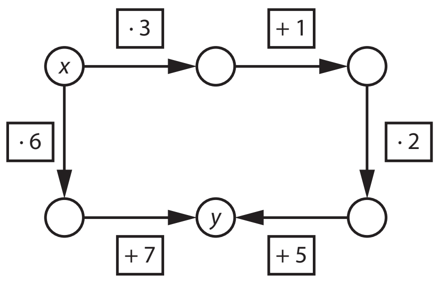
2. Do algebraického zápisu přepiš vyřešený šipkový graf a), b), c).

3. Nakresli šipkový graf, jehož algebraický zápis je $(x \cdot 3 + 1) \cdot 2 + 5 = x \cdot 6 + 7$.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

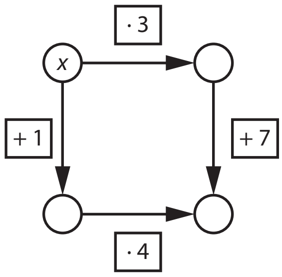
VÝSLEDKY:

1a) číslo + 3;
1b) u horní šipky je číslo · 4, u pravé šipky je číslo + 12.
1c) u levé šipky je číslo · 6, u dolní je číslo + 7.
2a) $x \cdot 5 + 15 = (x + 3) \cdot 5$;
2b) $x \cdot 4 + 12 = (x + 3) \cdot 4$.
2c) $(x \cdot 2 + 1) \cdot 3 + 4 = x \cdot 6 + 7$.
3. viz graf.



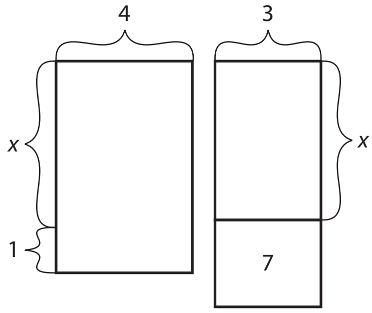
KOMENTÁŘ: V úlohách TIMSS nenajdeme úlohy o šipkových grafech, protože se tento způsob zápisu používá pouze sporadicky. Naše zkušenosti ukazují, že pro některé žáky je šipkový zápis přitažlivý a pomáhá jim porozumět nejen úpravám algebraických výrazů, ale i řešení rovnic, jevům linearity a aproximacím. Žák navíc vidí, že stejná myšlenka se dá formulovat dvěma různými způsoby: šipkovým grafem, který má charakter procesu, a identitou, která je konceptem.

2.4.3 **ŠIPKOVÉ GRAFY II**



1. Vyřeš šipkový graf, tj. najdi takové číslo x, aby cesta severozápadní i východojižní vedla ke stejnému výsledku.

2. Myslím si číslo. Když k jeho trojnásobku přičtu 7, dostanu totéž, jako když k myšlenému číslu přičtu 1 a pak to vynásobím 4. Jaké číslo jsem si myslel?



3. Rozměry levého obdélníka jsou 4 cm a (x + 1) cm. Pravý obdélník se skládá ze dvou obdélníků: horního s rozměry 3 cm a x cm a dolního s obsahem 7 cm². Víme, že obsah levého obdélníku je stejný jako obsah pravého obdélníku. Urči x.

4. Vyřeš rovnici $4 \cdot (x + 1) = 3 \cdot x + 7$ a řekni, jak tato rovnice souvisí s

a) šipkovým grafem z úlohy 1;
b) úlohou 2;
c) úlohou 3.

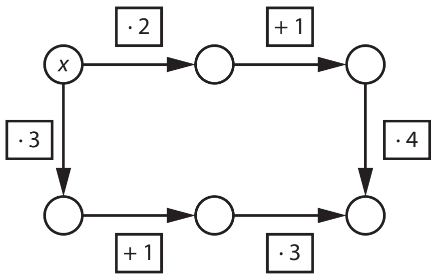
5. Obvod čtverce o straně x cm je stejný jako obvod rovnoramenného trojúhelníka se základnou x cm a ramenem dlouhým 6 cm. Urči x.

6. Vytvoř úlohu o

a) šipkovém grafu,
b) myšleném čísle, která vede na stejnou rovnici jako úloha 5.

7. Vyřeš šipkový graf a vytvoř úlohu o

a) myšleném čísle
b) obsazích obdélníků, která vede na stejnou rovnici.



✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. až **4.** viz komentář.
5. Úloha vede na rovnici $4 \cdot x = x + 6 + 6$. Odtud $x = 4$.
6a) šipkový graf má tři šipky: 4, +6 a +6;
6b) Myslím si číslo. Když k němu přičtu 6 a pak ještě 6, dostanu jeho čtyřnásobek. Jaké číslo jsem si myslel?
7. Řešení $x = 1$.
7a) Myslím si číslo. Když k jeho dvojnásobku přičtu 1 a výsledek vynásobím 4, dostanu totéž, jako když k jeho trojnásobku přičtu 1 a pak to vynásobím 3.
7b) Obdélník s rozměry $2x + 1$ a 4 má stejný obsah jako obdélník s rozměry $3x + 1$ a 3.

KOMENTÁŘ: Cílem úloh je poukázat na silný nástroj matematiky: různé situace můžeme popsat jediným modelem. V našem případě úlohy 1., 2. a 3., které se týkají různých prostředí, lze popsat jedinou rovnicí uvedenou v úloze 4. Ve všech úlohách je pak $x = 3$.

DALŠÍ KOMENTÁŘE K ALGEBRAICKÝM ÚLOHÁM

2.1.1 Vazba parametrů je náročná oblast školské algebry. Úlohy TIMSS jako M35 (M04-04), M36 (M07-06), M42 (M05-10) jsou poměrně jednoduché a naši žáci zde dopadli dobře. Proto kromě úlohy podobné úlohám šetření TIMSS (úloha 1) nabízíme i úlohy o něco náročnější.

4. Pro mnohé žáky je vstup do této oblasti nutné realizovat pomocí tabulárně evidovaných posloupností dílčích úloh. Žáci nejprve doplňují tabulku.

p	1	2	3	4	…	8	…							
q	3,75	4,5	5,25	6	…	9	…							

Pak zjistí, že čísla q narůstají po 0,75 a že q je celé, právě když $p = 4, 8, 12, \ldots$ Z těchto číselných závislostí pak vyvodí vztah $q = \frac{3p}{4} + 3$.

6. Když žák položí např. $a = 1$, najde $b = -2$, $c = 5$, $d = -4$, $e = 3$. Pak je schopen snadno na otázku odpovědět. Odpověď nezáleží na volbě a. To není lehké nahlédnout. Proto doporučíme, aby žáci volili i $a = 2$ i $a = 3$ apod.

2.1.2 Podobně jako na předchozí straně i zde je vhodné vazby hledat nejprve pomocí konkrétních situací. Například v úloze 1 řekneme, že $a = 20$. Poté volíme $a = 25$, pak $a = 18$ apod. Úloha 8 patří do propedeutiky analytické geometrie a je podobná jako úloha M41 (M04-08).

1. Úloha slovně popisující situaci podobnou úloze M30 (M07-04).
2. Jde o úlohu podobnou úloze M40 (04-06).
3. Podobá se úloze M37 (M07-05).

2.2.1 **1.** Úloha podobná úlohám M28 (M02-07) a M29 (M05-03). Jde o geometrický rytmus, který je evidován tabulkou. Zde má rytmus dvě složky: rytmus barev má periodu 3 a rytmus tvarů má periodu 2. Tedy složený rytmus má periodu rovnu nejmenšímu společnému násobku dvou přítomných rytmů – 6. Pro žáky, jimž práce se dvěma souběžnými rytmy dělá problémy, je třeba oba rytmy nejdříve oddělit a nechat je zaznamenávat rytmy například do dvou řádků nad sebe. Celou situaci je vhodné také zaznamenat na ciferník se šesti značkami.

2. Tabulkou zachycený rytmus je využit pro předpověď „velkého“ objektu.

3. Úloha je náročná svou textací. Text úlohy je možné značně zjednodušit takto: Když budeme pokračovat v horní hradbě dále, pak jeden bílý čtverec bude na místě
A) $6k$ B) $3k + 1$ C) $6k + 1$ D) $6k - 1$, kde k je přirozené číslo.

4. Úloha se týká změny způsobu kódování. Učitel může podobnou změnu přenést na pohyby. Například malá písmena mohou být kódována levou rukou, velká pravou rukou. Písmeno a/A předpažením, písmeno b/B upažením, písmeno c/C vzpažením.

2.2.2 **1.** Posloupnost šesti narůstajících staveb si většina žáků musí namodelovat.

2. Rytmus má dvě složky: rytmus barev, který má periodu 3, a rytmus tvarů, který má periodu 4, i když se v jedné periodě jeden tvar – růžek – opakuje dvakrát. Složený rytmus má pak periodu rovnu nejmenšímu společnému násobku dvou přítomných rytmů, tedy 12. Tento rytmus lze snadno převést do rytmu ve 2D, a dokonce v 1D, jak požaduje úloha 3.
Situace nabízí další otázky, které může dát učitel žákům, kteří jsou rychleji hotovi:
g) Z kolika krychlí je utvořena hradba, která začíná i končí ležatým šedivým hranolem?
h) Jak končí hradba složená ze 126 krychlí, jestliže začíná jako na obrázku 2 šedivým ležícím hranolem?

2.2.7 **2.** Již druhé číslo a pak všechna další čísla této řady jsou dělitelná číslem 9.

4. Vždy se opakuje řada čísel 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 1, 2, 4, 8, 16, …, nebo se opakuje tato řada po určitém počtu prvních členů (prvním členem nemusí být 16). Výjimkou je číslo 19. U něj vždy vyjde 19. Další výjimkou jsou dvouciferné násobky 19. Zde je druhý člen vždy 19.

2.2.8 V úlohách TIMSS se vývojové diagramy neobjevily. Do sbírky je zařazujeme, protože víme, že některým žákům právě tento způsob zobrazení umožňuje dobrý vhled do procesu.

2. Vývojový diagram popisuje algoritmus dělení číslem 11 se zbytkem. Tedy 134 : 11 = 12 (2). V seznamu, který je řešením úlohy, je číslo 2 (zbytek) poslední a počet čísel seznamu je 13, což je o 1 více než výsledek dělení 12.

3. Popsanou řadu nazýváme „řada, která se láme v čísle 30“. Analogicky lze popisovat řady, které se lámou v jiných číslech.

2.3.2
1. Úlohu lze řešit také modelováním. Zvolíme například $s = 3$, $h = 5$. Tedy kozy jsou 2 a nohou pak je $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$. Distraktory: A) $2s + 4h = 26$ – nevyhovuje, B) $3h = 15$ – nevyhovuje, C) $2(h + s) = 16$ – nevyhovuje. Vyhovuje tedy D) $4h - 2s = 14$.
2. Úlohu lze modifikovat změnou počtu dětí rodiny Slámových. Je to provedeno v úloze **5.**
3. Počet dívek na začátku označme d. Pak hochů je $d + n$. Po příchodu dalších bude dívek $d + 4m$ a hochů $d + n + m$. Tato čísla se rovnají, tedy $d + 4m = d + n + m$, odkud $3m = n$.
7. Vhled do situace žák získá, když situaci modeluje několika případy. Zde zjistí, že jestliže je věkový průměr tří nejstarších q, pak každý z nich může mít q let. Jestliže nejmladší má x let, pak průměr všech čtyř je $\frac{(3q + x)}{4} = p$. Odtud $x = 4p - 3q$.

2.3.5
Zobecňování náleží k důležitým schopnostem žáka. Je třeba jej použít v různých situacích, ale jeho nácvik je obtížné realizovat prostřednictvím jednotlivých úloh, jaké lze zařazovat do mezinárodních šetření. Zatímco jednotlivá úloha v šetření TIMSS může schopnost zobecňování ověřovat, k rozvoji této schopnosti je potřeba celé série gradovaných úloh.
V našich úlohách je žák po získání série konkrétních gradovaných výsledků vyzván, aby odhadl výsledek „vzdáleného“ prvku řady. Nejedná se zde o odhad ve smyslu „co nejblíže“, ale o typ přesného výsledku, který ovšem není podepřen přímým výpočtem, ale pouze pozorovanou zákonitostí.

2.3.6
Sofistikovaný problém, který dává žákům možnost získat zkušenosti s lineární i kvadratickou funkční závislostí, řešit situaci početně i geometricky, odhalovat překvapivé jevy.
1. Závislost obvodu o na délce x je po částech lineární. Pro $x = 0$ a $x = 11$ se šestiúhelník mění na čtverec a pro $x = 5{,}5$ na obdélník. Hodnota obvodu se v bodě $x = 5{,}5$ láme. Z grafu se snadno určí obvod pro všechna $x \in \langle 0, 11 \rangle$.
2. Závislost obsahu S na x je kvadratická a hodnoty S se pro necelá x dají jen odhadnout. Výraz $S = x^2 + (11 - x)^2 = 2x^2 - 22x + 121$ nabývá nejmenší hodnotu pro $x = 5{,}5$. To nahlédneme, když jej napíšeme ve tvaru $2(x - 5{,}5)^2 + 60{,}5$.
3. Didakticky zajímavé jsou dva případy řešení – oba jsme pozorovali u žáků. První spočívá v měření. Žáci naměří hodnoty mezi 155 a 156 mm. Některé žáky pak napadne, že hodnota u je konstantní. Evidovali jsme i velice pěkný žákův důkaz tohoto tvrzení: Označme Q průsečík přímek BD a AE. Pak $u = |AE| + |BD| = |AE| + |BQ| + |QD| = |AQ| + |QB|$.
   Druhé zajímavé řešení spočívá ve výpočtech. Žák do sloupce u postupně vkládá čísla: $\sqrt{242}$ (čtverec), $\sqrt{2} + \sqrt{200}$, $\sqrt{8} + \sqrt{162}$, $\sqrt{18} + \sqrt{128}$, $\sqrt{32} + \sqrt{98}$, $\sqrt{50} + \sqrt{72}$, $\sqrt{50} + \sqrt{72}$, $\sqrt{32} + \sqrt{98}$, $\sqrt{18} + \sqrt{128}$, $\sqrt{8} + \sqrt{162}$, $\sqrt{2} + \sqrt{200}$, $\sqrt{242}$ (čtverec). Učitel žáka požádá, aby zjistil, které z těchto čísel je největší a které nejmenší. Žák s překvapením zjistí, že jsou to čísla stejná, neboť $\sqrt{242} = 11 \cdot \sqrt{2} = (1 + 10) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{200}$ atd.

2.4.1
Čím více různých strategií žáci objeví a prezentují třídě, tím hlouběji třída do úlohy vidí.
7. Žákům, kteří mají s úlohami o věku potíže, doporučíme, aby si napsali tabulku.

Věk matky	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	…	60
Věk syna	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	…	30

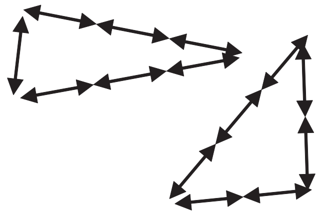
Úlohu **8** lze rozepsat podobně.

3 GEOMETRIE

3.1 GEOMETRICKÉ TVARY

3.1.1 TROJÚHELNÍKY

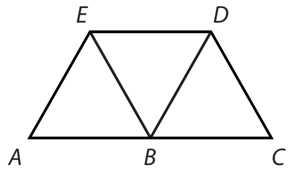
1. Na obrázku 1 jsou dva různé trojúhelníky. Každý je složen ze 7 zápalek. Kolik různých trojúhelníků lze sestavit z 9 zápalek?



Obr. 1

2. Sestroj rovnoramenný trojúhelník, jehož obvod je 11 cm a jedna jeho strana měří 5 cm. Najdi všechna řešení, narýsuj je a u každého změř velikost největšího vnitřního úhlu.

3. Na obrázku 2 jsou vyznačeny tři rovnostranné trojúhelníky. Do prostředního sloupce tabulky zapiš všechny trojúhelníky, které jsou určeny body *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, a šipkami k nim přiřaď jejich vlastnosti.

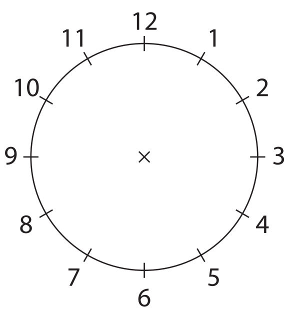


Obr. 2

ROVNOSTRANNÝ				OSTROÚHLÝ
ROVNORAMENNÝ		Δ *ABD*		PRAVOÚHLÝ
RŮZNOSTRANNÝ				TUPOÚHLÝ

4. Na obrázku 3 je ciferník s dvanácti vyznačenými body (v celých hodinách). Jaký trojúhelník vznikne spojením bodů 2, 9 a 12 ?

A) rovnoramenný tupoúhlý
B) různostranný pravoúhlý
C) různostranný tupoúhlý
D) jiný



Obr. 3

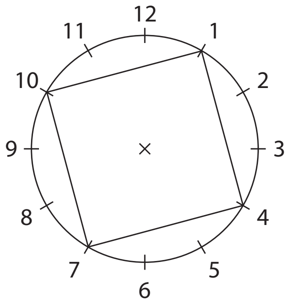
✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

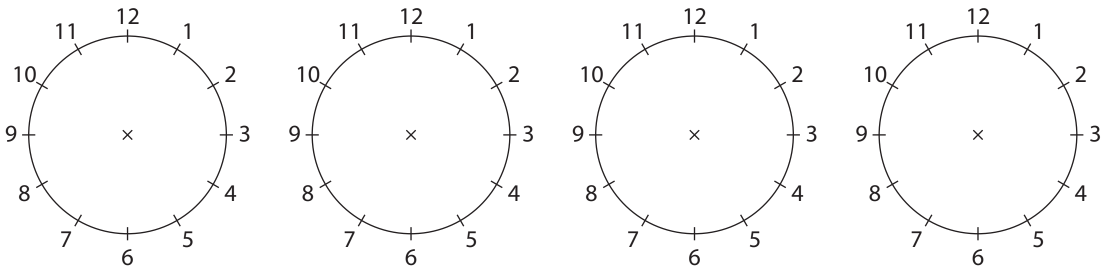
1. Tři trojúhelníky (1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3) – čísla udávají počet zápalek jedné strany trojúhelníku.
2. Dva trojúhelníky (1, 5, 5), 84°; (3, 3, 5), 112°.
3. Rovnostranné ostroúhlé (*ABE*, *BCD*, *BDE*), rovnoramenné tupoúhlé (*ABD*, *ADE*, *BCE*, *CDE*), různostranné pravoúhlé (*ACD*, *ACE*).
4. C).

3.1.2 ČTYŘÚHELNÍKY

1. **Na ciferníku je vyznačen čtverec s vrcholy v bodech 1, 4, 7 a 10. Nazveme jej čtverec (1, 4, 7, 10). Pojmenuj pomocí čtveřice čísel další typy čtyřúhelníků, které lze vyznačit na ciferníku a které mají jeden vrchol v bodě 1, např.**



obdélníky .... ,
lichoběžníky .... ,
další ....

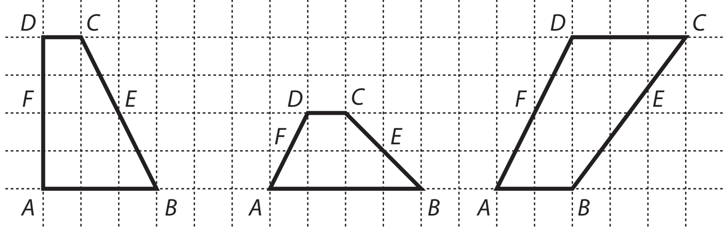


2. **Narýsuj lichoběžník, jehož**

a) ramena jsou na sebe kolmá,
b) úhlopříčky jsou na sebe kolmé,
c) jedna úhlopříčka je kolmá na jedno rameno,
d) jedna úhlopříčka je kolmá na základnu.

3. **Narýsuj libovolný obdélník a rozstřihni jej na dvě části tak, aby z nich bylo možné složit kosočtverec.**

4. **Na obrázku jsou 3 lichoběžníky *ABCD*. Body *E*, *F* jsou středy ramen, tedy úsečka *EF* je střední příčka lichoběžníku. Z každého lichoběžníku *ABCD* vytvoř kosodélník *AD´F´F* tak, že lichoběžník *FECD* otočíš kolem bodu *E* o 180°. Vzniknou tak body *C´*(= *B*), *D´*, *F´*. Porovnej obvod kosodélníku a lichoběžníku.**

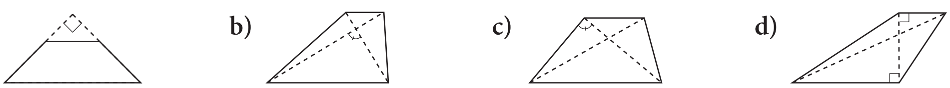


✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

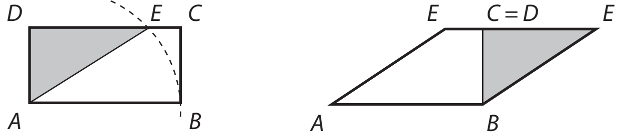
VÝSLEDKY:

1. Dva typy obdélníků: (1, 2, 7, 8), (1, 3, 7, 9), mnoho typů rovnoramenných lichoběžníků, např. (1, 2, 3, 12), 1, 2, 4, 11), (1, 2, 5, 10), (1, 2, 6, 9), (1, 3, 4, 12), deltoid (1, 6, 11, 12), (1, 3, 6, 10)…

2. a) b) c) d)



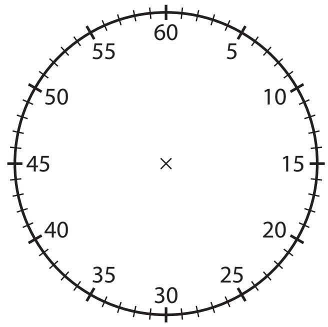
3.



4. Obvod lichoběžníku je větší, menší, stejný – podle pořadí obrázků.

3.1.3 MNOHOÚHELNÍKY I

Na obrázku je ciferník s vyznačenými minutami. Budeme tvořit pouze mnohoúhelníky s vrcholy ve vyznačených bodech.

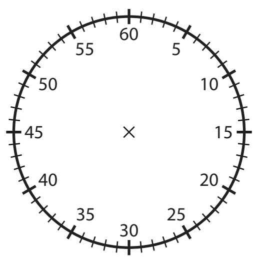
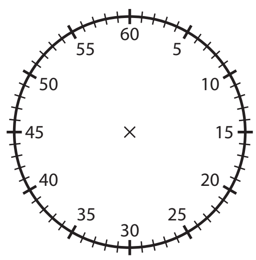
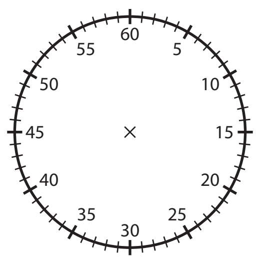
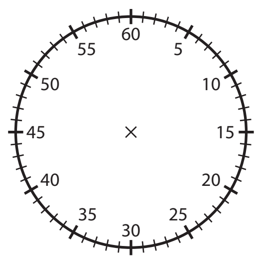


1. **Dva sousední vrcholy pravidelného mnohoúhelníku jsou v bodech 5 a 15. O jaký mnohoúhelník se jedná?**

2. **Najdi všechny pravidelné mnohoúhelníky, které mají dva vrcholy v bodech 10 a 40.**

3. **Dva vrcholy pravidelného pětiúhelníku jsou v bodech 1 a 25. Najdi další vrcholy.**

4. **Které pravidelné mnohoúhelníky lze znázornit na ciferníku s vyznačenými minutami? Urči vždy od každého jeden s vrcholem v bodě 60 a druhý s vrcholem v bodě 7, například rovnostranný trojúhelník (60, 20, 40) a (7, 27, 47).**

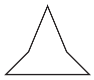





5. **Načrtni**

   a) pětiúhelník, který je osově souměrný, má dvě úhlopříčky vnější a jednu dvojici nesousedních stran na sebe kolmých,
   b) pětiúhelník, jehož aspoň jedna strana je částí některé úhlopříčky,
   c) mnohoúhelník, jehož každá strana je částí nějaké úhlopříčky,
   d) mnohoúhelník, jehož aspoň jedna úhlopříčka je částí jiné úhlopříčky.

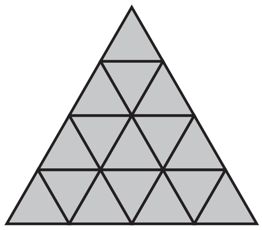
✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

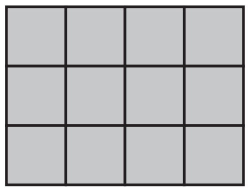
1. Jde o pravidelný šestiúhelník.
2. Musí to být pravidelný mnohoúhelník, který je symetrický podle nejdelší úhlopříčky, tedy čtyř-, šesti-, deseti-, dvanácti-, dvaceti-, třiceti- a šedesátiúhelník.
3. Vrcholy pětiúhelníku jsou v bodech 1, 13, 25, 37, 49.
4. Počet vrcholů pravidelného mnohoúhelníku musí být dělitelem čísla 60. Tedy to jsou rovnostranné trojúhelníky, čtverce [(60, 15, 30, 45), (7, 22, 37, 52)], pravidelné pěti- [(60, 12, 24, 36, 48), (7, 19, 31, 43, 55)], šesti- [(60, 10, 20, 30, 40, 50), (7, 17, 27, 37, 47, 57)], deseti- [(60, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54), (7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55,1)], dvanácti- [(60, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55), (7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 2)], patnácti- [(60, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56), (7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 3)], dvaceti- [(60, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57), (7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 1, 4)], třiceti- (má vrcholy ve všech sudých, nebo ve všech lichých číslech), šedesátiúhelník.
5. **a)** Např.  **b)**  **c)** i **d)**  .

3.1.4 **MNOHOÚHELNÍKY II**

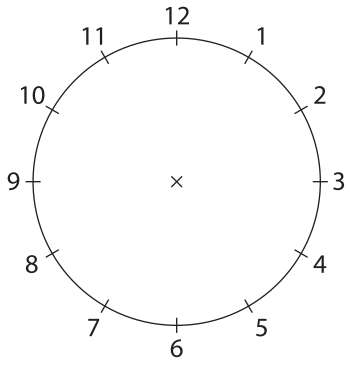
1. Kolik pravidelných mnohoúhelníků je na obrázku a) 1, b) 2?



Obr. 1



Obr. 2

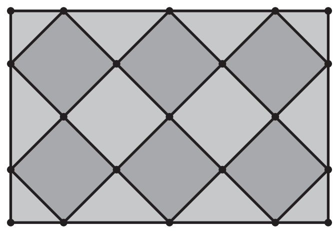


Obr. 3

2. Spojením tří bodů vyznačených na ciferníku na obrázku 3 vznikne trojúhelník. Například trojúhelník s vrcholy v bodech 3, 6 a 12, který je označen trojicí (3, 6, 12), je pravoúhlý rovnoramenný. Který trojúhelník je rovnostranný?

A) (1, 4, 7) B) (3, 8, 11) C) (2, 9, 11) D) (2, 6, 10)

3. Obdélníková dlaždice (na obrázku 4) je pokryta čtverci dvou barev s úhlopříčkou délky 4 cm. Celkem 35 takovými dlaždicemi vydláždíme obdélník nejmenšího možného obvodu. Žádné dlaždice se neřežou. Spojením dlaždic vznikne mozaika ze světlých a tmavých čtverců a světlých trojúhelníků.



Obr. 4

a) Jaké jsou rozměry vydlážděného obdélníku?
b) Kolik tmavých čtverců obsahuje celá mozaika?
c) Kolik světlých čtverců obsahuje celá mozaika?
d) Po okraji obdélníkové mozaiky jsou světlé pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky (poloviny nebo čtvrtiny světlých čtverců). Jaký je jejich celkový obsah?

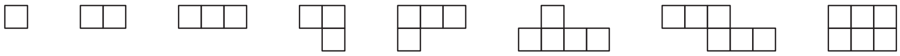
✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

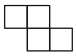
VÝSLEDKY:

1a) Na obrázku je 27 trojúhelníků. (16 jednotkových + 7 ze čtyř jednotkových + 3 z devíti jednotkových + 1 ze šestnácti jednotkových), tři šestiúhelníky.
1b) 20 čtverců (12 jednotkových + 6 ze čtyř jednotkových + 2 z devíti jednotkových).
2D) (2, 6, 10).
3a) 60 cm vodorovně, tj. 5 dlaždic, 56 cm svisle, tj. 7 dlaždic;
3b) 420 čtverců;
3c) na poloviny 3 čtverce do každé dlaždice, tedy 95 čtverců, na čtvrtiny jeden čtverec do každé dlaždice, tedy 35 čtverců.

3.1.5 **POLYMINA**

Útvar vyznačený na čtverečkovaném papíře a tvořený jedním, dvěma nebo více čtverečky se nazývá **polymino.** Na obrázku jsou uvedeny příklady polymin; zleva doprava monomino, bimino, trimino, trimino, tetramino, pentamino, hexamino a hexamino.



1. **Najdi všechna různá pentamina, která vzniknou přiložením monomina  k tetraminu . Vyber z nich ta, která jsou sítí krychle „bez víka“.**

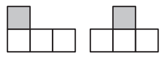
2. **Najdi pentamino, které nemůže být doplněno jedním monominem na síť krychle.**

3. **Pentamino z horního obrázku je částí 4 různých sítí krychle. Najdi pentamino, které je částí pouze jedné sítě krychle.**

4. **Najdi všechna pentamina, která nelze rozložit na trimino  a bimino .**

5. **Najdi všechna tetramina.**

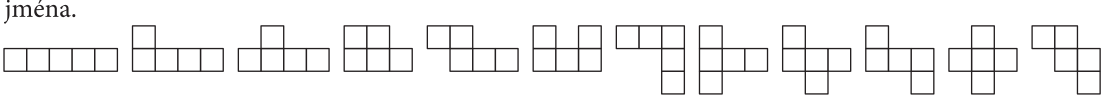
6. **O dvou tetraminech řekneme, že jsou příbuzná, jestliže z jednoho tetramina oddělíme jeden čtverec a po přiložení na jiné místo dostaneme tetramino druhé. Viz například dvě tetramina na obrázku.**



a) Uspořádej všechna tetramina do kruhu tak, aby každá dvě sousední byla příbuzná.
b) Uspořádej všechna tetramina do řady tak, aby každá dvě sousední byla příbuzná, ale první a poslední nebyla.

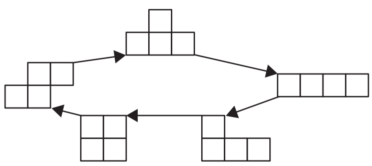
✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

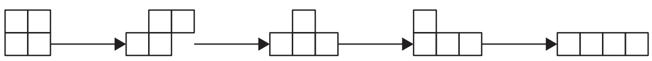
VÝSLEDKY: Uvedeme přehled všech pentamin, pojmenujeme je a dále budeme ve výsledcích uvádět pouze jejich jména.



A B C D E F G H I J K L

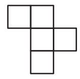
1. D, E, I, L a z nich E, I, L jsou sítěmi krabičky bez „víka“.
2. A, D, F, G.
3. K.
4. C, F, I, J, K, L.
5. viz 6.

6a) Např. 

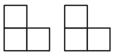
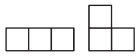
6b) Např. 

3.1.6 SÍTĚ KRYCHLE

1. **Najdi všechny sítě krychle, které vzniknou přiložením jednoho monomina k pentaminu na obrázku.**

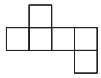


2. **Najdi všechny sítě krychle, které je možné sestavit ze dvou trimin.**

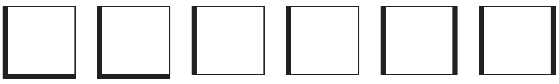
a)  b)  c) 

3. **Najdi všechna pentamina, ze kterých mohou vzniknout 4 různé sítě krychle přiložením jednoho monomina.**

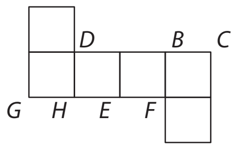
4. **Najdi všechny sítě, které mohou vzniknout z dané sítě přemístěním jednoho čtverce.**

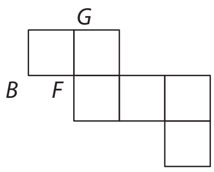


5. **Je dáno šest čtverců s některými stranami vyznačenými tlustě černě. Sestroj síť krychle tak, že se mohou spojovat pouze tyto vyznačené strany. Najdi všechna řešení a k nalezené síti nakresli příslušnou krychli s takto vyznačenými hranami.**



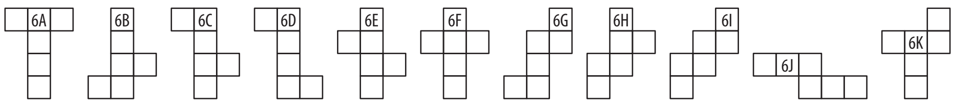
6. **Některé vrcholy sítě krychle *ABCDEFGH* jsou pojmenovány. Doplň jména ostatních vrcholů sítě pro sítě na obrázku a) i b).**

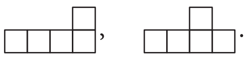
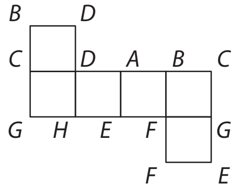
a) 

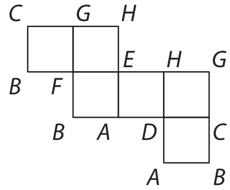
b) 

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: Pro jednodušší komunikaci si pojmenujeme všechny sítě krychle takto:

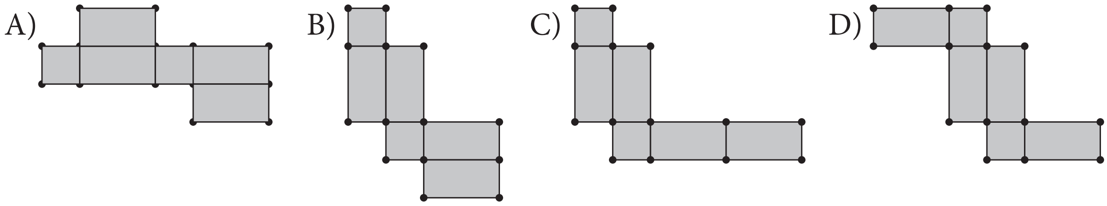


1. 6B, 6E, 6H, 6K.
2a) 6C, 6D, 6E, 6G, 6H, 6I;
2b) 6A, 6J;
2c) žádná.
3. 
4. 6A, 6B, 6C, 6D, 6E, 6F, 6G, 6H.
5. 
6. a) 

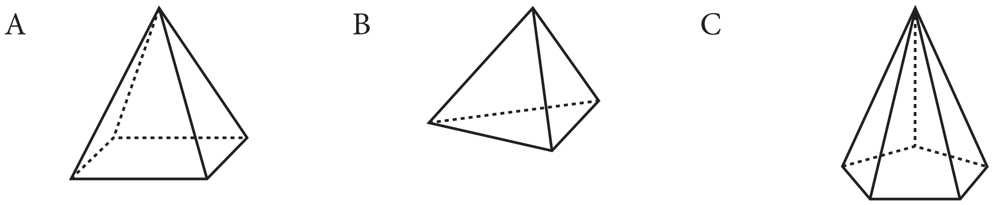
b) 

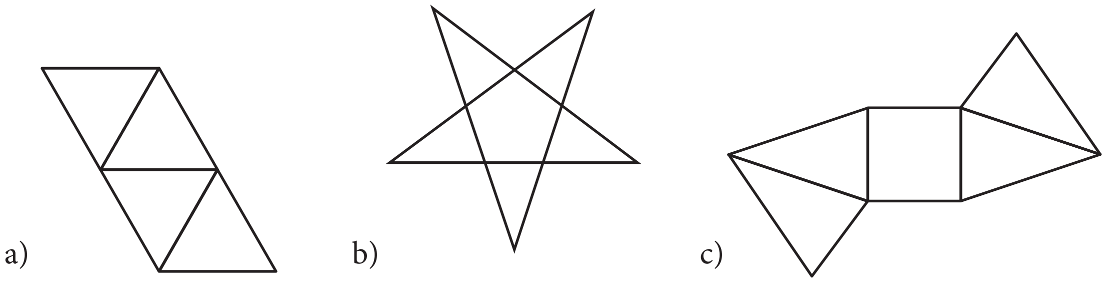
3.1.7 **SÍTĚ HRANOLŮ, JEHLANŮ**

1. Síť pravidelného čtyřbokého hranolu je možné sestavit ze dvou shodných čtverců a čtyř shodných obdélníků. Na kterém obrázku není síť hranolu?

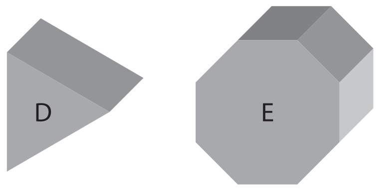


2. K tělesům A, B a C přiřaď správnou síť a), b) nebo c).





3. Narýsuj sítě těles D a E na obrázku a napiš přesný název těles. Těleso D má délky všech hran 30 mm. Osm stěn tělesa E jsou čtverce o straně 28 mm a pravidelný osmiúhelník, který je podstavou, je vepsán do čtverce s úhlopříčkou 73 mm.



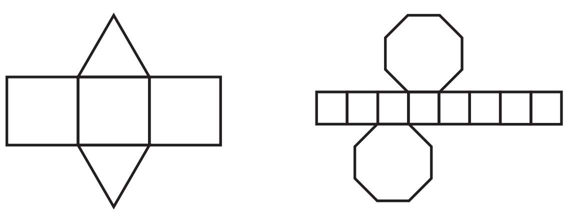
✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1C).

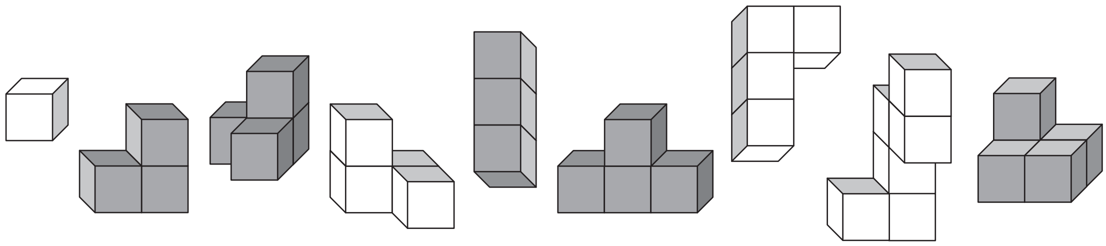
2. A–c), B–a), C–b).

3. D – pravidelný trojboký hranol, E – pravidelný osmiboký hranol. Příklady sítí na obrázku.



3.1.8 KRYCHLOVÁ TĚLESA

1. Na obrázku 1 je zobrazeno z různých pohledů devět krychlových těles A, B, …, I. Do tabulky (níže) zaznamenej počet vrcholů – *v*, hran – *h* a stěn – *s* každého z nich.

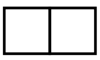


A B C D E F G H I

2. Doplň do tabulky údaje *v*, *h* a *s* o dalších tělesech: J – pravidelný pětiboký hranol, K – pravidelný osmiboký hranol, L – pravidelný n-boký hranol, M – pravidelný pětiboký jehlan, N – pravidelný osmiboký jehlan, O – pravidelný *n*-boký jehlan.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
v															
h															
s															

3. Najdi a popiš a) některá další, b) všechna krychlová tělesa, která mají stejný počet vrcholů, hran i stěn jako těleso B na obrázku 1. Urči jejich povrch *S*. Povrch tělesa B je 14 čtverců.

4. Která tělesa z obrázku je možné vidět z nějakého pohledu (ze předu, ze strany nebo z boku) takto:  **?**

5. Těleso C na obrázku je vidět zepředu a zprava stejně – jako „růžek". Na obrázcích krychlových těles na této straně vyber další taková, která je možné vidět aspoň ze dvou stran (zepředu, ze strany nebo z boku) stejně.

6. Vytvoř krychlové těleso ze sedmi krychlí, které má 32 vrcholů a tři roviny souměrnosti. Urči počet jeho hran a stěn.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

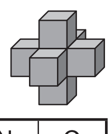
1. a **2.** Viz tabulka.

3. Všechna tělesa tvaru L složená ze dvou hranolů $1 \cdot 1 \cdot n$ a $1 \cdot 1 \cdot m$. Jejich povrch je $4 \cdot (n + m) + 2$.

4. B, F, G.

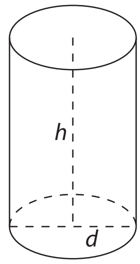
5. Těleso A – ze všech stran, B – shora a ze strany, D a E – ze předu a zleva, I – ze předu a ze strany.

6. Těleso tvoří prostorový kříž, má 60 hran a 30 stěn (viz obr.).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
v	8	12	18	15	8	16	12	20	14	10	16	$2n$	6	9	$n + 1$
h	12	18	28	23	12	24	18	30	21	15	24	$3n$	10	16	$2n$
s	6	8	12	10	6	10	8	12	9	7	10	$n + 2$	6	9	$n + 1$

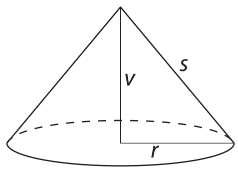
3.1.9 **SÍTĚ VÁLCE, KUŽELE**



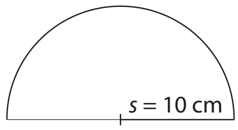
1. Plechovka má tvar válce, průměr dna je 8 cm, výška je 10 cm. Kolik listů papíru formátu A4 (210 mm × 297 mm) je potřeba na zhotovení 20 etiket, které tvoří plášť plechovky?

2. Jaký je poměr výšky válce *h* a průměru podstavy *d* (*h* : *d*), jestliže síť válce je čtverec a dva kruhy? (Obvod kruhu $o = \pi d$.)

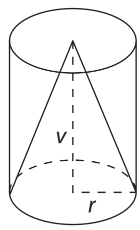
3. Silniční válec má průměr 80 cm a výšku 150 cm, kolem své osy se otočí jedenkrát za 15 s. Jaké jsou rozměry a obsah uválcované plochy po 3 min plynulé jízdy válce?



4. Střecha rotundy má tvar rotačního kužele, jehož výška *v* je 210 cm, průměr podstavy kužele *d* je 9 m. Kolik krytiny je potřeba na novou střechu, zanedbáme-li odpad? (Povrch kužele $S = \pi rs$, kde *s* je délka strany kužele.)



5. Kornoutek byl vytvořen z půlkruhu o poloměru 10 cm. Jaká je hloubka kornoutku (tj. výška jehlanu, jehož plášť je daný kornoutek)?



6. Jsou dány válec a kužel o shodné výšce *v* i podstavě o poloměru *r*. Víme, že plášť válce a plášť kužele mají stejný obsah. Jaká je výška *v* a poloměr *r*?

✂ ------------------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------- ✂

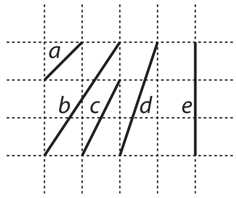
VÝSLEDKY:

1. Na jeden arch se vejdou dvě etikety (10 · 25,12), je tedy potřeba 10 archů.
2. $h : d = \pi$
3. Obdélník, jedna strana je stejná jako výška válce, tj. 150 cm, druhá je: 251,2 cm · 12 otáček = 3 014 cm = 30,14 m.
4. $S \doteq 3{,}14 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}97 \doteq 70{,}23\ m^2$.
5. Hloubka kornoutku je $\sqrt{75} \cdot 8{,}7$ cm.
6. $r = \sqrt{3} \cdot v$.

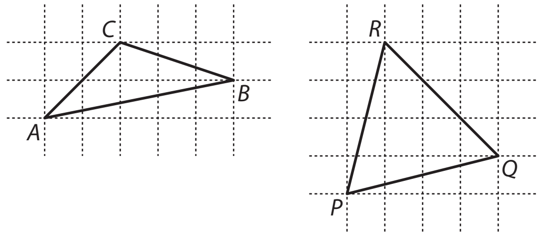
3.2 GEOMETRICKÉ MĚŘENÍ

3.2.1 DÉLKA MĚŘENÍM, OBVOD

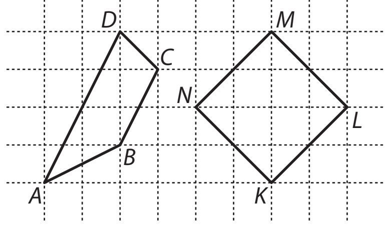
1. Úsečky *a*, *b*, *c*, *d*, *e* z obrázku překresli na centimetrový čtverečkovaný papír a měřením zjisti jejich délky v milimetrech. Pokud zjistíš, že naměřená délka úsečky nejsou celé milimetry, napiš k číslu znak $^+$ (např. 20^+ mm), jestliže úsečka měří o kousek více (než 20 mm), a znak $^-$ (např. 20^- mm), jestliže úsečka měří o kousek méně (než 20 mm). Jsi-li přesvědčen, že úsečka měří přesně (např. 20 mm), napiš znak $^!$ (např. $20^!$ mm).



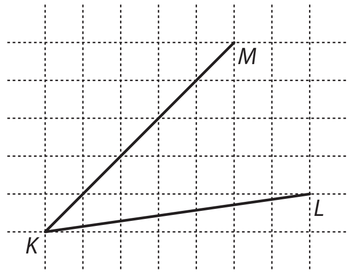
2. Překresli oba trojúhelníky na centimetrový čtverečkovaný papír. Měřením délek stran a vnitřních úhlů trojúhelníků rozhodni, zda jsou trojúhelníky rovnoramenné. Urči obvod obou trojúhelníků.



3. Dva spolužáci Pavel a Petr měřili obvod lichoběžníku *ABCD* a čtverce *KLMN* na obrázku. Pavel změřil každou stranu zvlášť, délky sečetl a zjistil, že obvod lichoběžníku je 102 mm a čtverce 112 mm. Petr si nejdříve narýsoval čtyřnásobek strany čtverce *MN*, změřil jej a vyšel mu obvod čtverce 113^+ mm. Pak si narýsoval čtyřnásobek strany *BC* lichoběžníku, změřil jej, přičetl k tomu osminu obvodu čtverce a vyšlo mu 103^+ mm. Čí měření bylo přesnější a proč?



4. Přerýsuj úsečky *KL* a *KM* na centimetrový čtverečkovaný papír a porovnej jejich délky. Svůj výsledek prověř.



✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. $|a| = 14^+$, $|b| = 36^+$, $|c| = 22^+$, $|d| = 32^-$, $|e| = 30^!$.

2. Δ *ABC* není rovnoramenný, jeho obvod je přibližně 110,9 mm a jeho vnitřní úhly při vrcholech *A*, *B*, *C* jsou po řadě 33,7°, 29,7° a 116,6°. Δ *PQR* je rovnoramenný se základnou *RQ*, jeho obvod je přibližně 124,9 mm, vnitřní úhel při vrcholu *P* je 62° a vnitřní úhel při vrcholu *Q* je 59°.

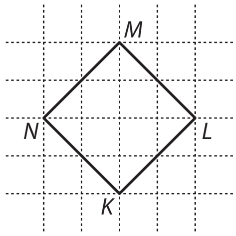
3. Přesnější měření bylo měření Petra. Pavel svou chybu měření násobil čtyřikrát.

4. $KL \cong KM$ a $|KL| = |KM| \doteq 70{,}71$ mm.

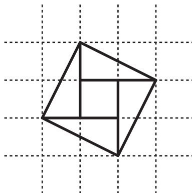
3.2.2 OBSAH MNOHOÚHELNÍKU I

1. Jaký je obsah mřížového čtverce *KLMN* na obrázku 1? Jakým způsobem jej lze rozstříhat a z dílů sestavit dva shodné čtverce? Jako jednotku obsahu zvol jeden čtverec čtvercové sítě.

2. Čtverec na obrázku 2 je rozřezán na 5 částí. Urči obsah každé z nich i celého čtverce.

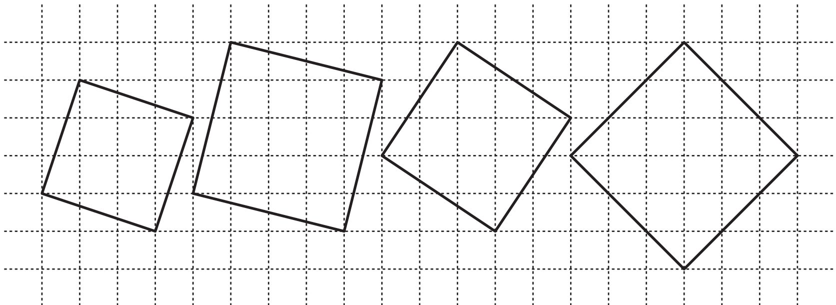


Obr. 1



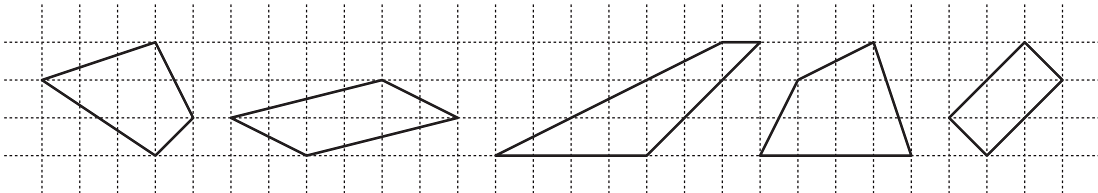
Obr. 2

3. Na obrázcích 3a, 3b, 3c, 3d je řada čtverců. Pomocí rozřezávání vypočítej jejich obsah.



Obr. 3a 3b 3c 3d

4. Metodou rozřezávání zjisti obsah každého z následujících čtyřúhelníků.

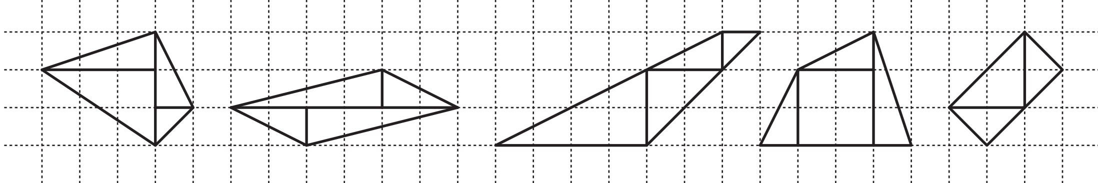


Obr. 4a 4b 4c 4d 4e

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

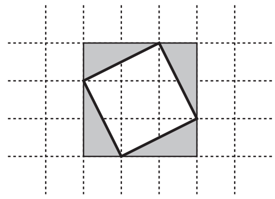
VÝSLEDKY:

1. $S = 8$. Čtverec *KLMN* rozstříháme podél úhlopříček *KM* a *LN*.
2. Každá z pěti částí má obsah 1Ω. Slepením dvou trojúhelníků dostaneme obdélník $2 \cdot 1$. Obsah čtverce $S = 5$.
3a) $S = 10$;
3b) $S = 17$;
3c) $S = 13$;
3d) $S = 18$.
4a) $S = 6$ (= 3 + 1,5 + 1 + 0,5);
4b) $S = 6$ (= 2 + 2 + 1 + 1);
4c) $S = 7{,}5$ (= 4 + 2 + 1 + 0,5);
4d) $S = 7{,}5$ (= 1 + 1 + 1,5 + 4);
4e) $S = 4$ (= 1 + 1 + 2).



Obr. 4a 4b 4c 4d 4e

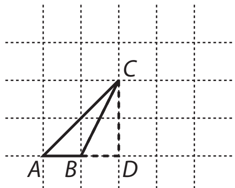
3.2.3 OBSAH MNOHOÚHELNÍKU II



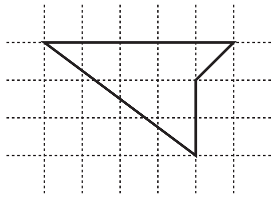
Obr. 1

1. Obsah mřížového čtverce lze určovat i metodou „rámování“. Je naznačena na obrázku 1. Vypočítej použitím této metody obsah daného čtverce.

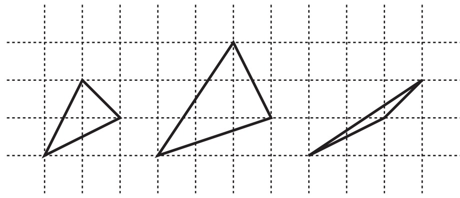
2. Trojúhelník *ABC* na obrázku 2 je doplněn pravoúhlým trojúhelníkem *BDC* na pravoúhlý trojúhelník *ADC*. Obsahy obou pravoúhlých trojúhelníků lze snadno spočítat jako poloviny obdélníku nebo čtverce. Vypočti obsah trojúhelníku *ABC*.



Obr. 2



Obr. 3



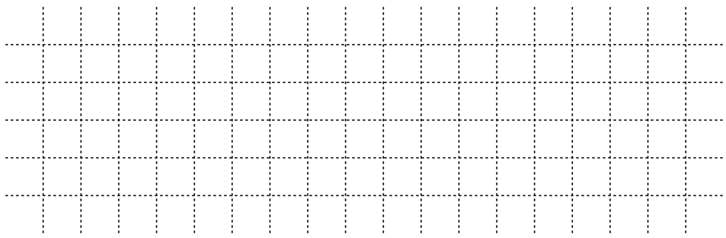
Obr. 4a 4b 4c

3. Doplněním na pravoúhlý trojúhelník zjisti obsah nekonvexního čtyřúhelníku na obrázku 3.

4. Použij metodu rámování a urči obsahy trojúhelníků na obrázcích 4a, 4b a 4c.

5. Do mříže nakresli další mřížové trojúhelníky (všechny vrcholy jsou v mřížových bodech), které mají stejný obsah jako trojúhelník *ABC* na obrázku 2.

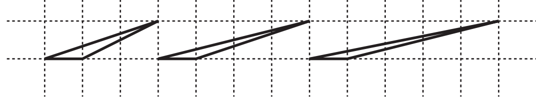
6. Do mříže překresli Δ*ABC* z obrázku 2. Nakresli další mřížové trojúhelníky se stejným obsahem jako Δ*ABC*, které s ním mají společnou stranu a) *AB*, b) *BC*, c) *AC*.



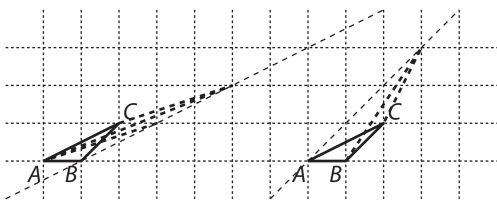
↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

VÝSLEDKY:

1. $S = 5$ (čtverečků).
2. $S_{ABC} = 0{,}5$.
3. $S = 4{,}5$.
4a) $S = 1{,}5$;
4b) $S = 3{,}5$;
4c) $S = 0{,}5$.
5. Např. na obr. 5.
6a) viz obr. 5.
6b) a **6c)** Obr. 6. Všechny vrcholy hledaných trojúhelníků leží na rovnoběžce s příslušnou stranou procházející protějším bodem.



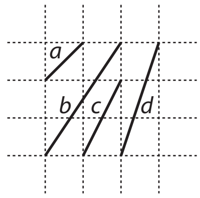
Obr. 5



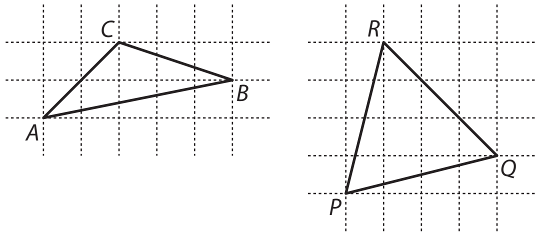
Obr. 6

3.2.4 DÉLKA ÚSEČKY V MŘÍŽI

1. Úsečky *a*, *b*, *c*, *d* z obrázku překresli na centimetrový čtverečkovaný papír. Ke každé úsečce nakresli čtverec tak, aby daná úsečka byla jeho stranou. Urči obsah čtverce a pomocí něj urči délku příslušné úsečky.



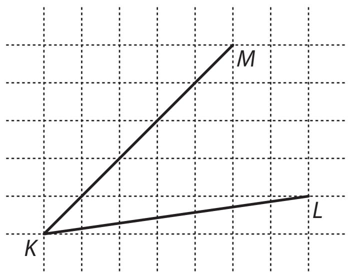
2. Nad každou stranou dvou trojúhelníků na obrázku sestroj čtverec. Pomocí obsahů čtverců rozhodni, zda jsou trojúhelníky rovnoramenné.



3. Žáci počítali obsahy mřížových čtverců. Došli k výsledkům 5, 6, 13, 18. Tři výsledky jsou správně a jeden chybně. Který? (Jeden čtverec mříže je jednotkou obsahu.)

A) 5 B) 6 C) 13 D) 18

4. Přerýsuj úsečky *KL* a *KM* na čtverečkovaný papír a porovnej jejich délky a) pomocí obsahů čtverců; b) ověřením, zda trojúhelník *KLM* je rovnoramenný.



5. Sestroj na centimetrový čtverečkovaný papír mřížovou úsečku, jejíž délka je a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{13}$ cm.

6. Žáci počítali délky mřížových úseček. Došli k výsledkům $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ a $\sqrt{26}$. Tři výsledky jsou správně a jeden chybně. Který?

A) $|AB| = \sqrt{10}$ B) $|AB| = \sqrt{17}$ C) $|AB| = \sqrt{19}$ D) $|AB| = \sqrt{26}$

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. Obsah čtverce nad stranou *a* je 2, nad stranou *b* je 13, nad *c* je 5 a nad *d* je 10.

2. ΔABC není rovnoramenný, obsah čtverce nad stranou *AC* je 8 a nad stranou *BC* je 10. ΔPQR je rovnoramenný – obsahy čtverců nad stranami *PQ* a *PR* jsou stejné, 17.

3B).

4a) Obsahy čtverců nad úsečkami *KL* a *KM* jsou stejné, a sice 50.

4b) ΔKLM je rovnoramenný, neboť střed úsečky *LM* je zároveň patou výšky z vrcholu *K*.

5. Jsou to úsečky *a*, *c*, *b* z obrázku u úlohy 1. Lze je sestrojit jako přepony pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami délek **a)** 1, 1; **b)** 2, 3; **c)** 1, 2.

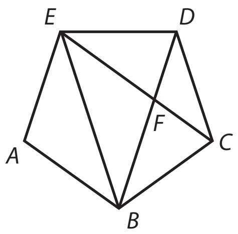
6C).

3.2.5 ÚHLY

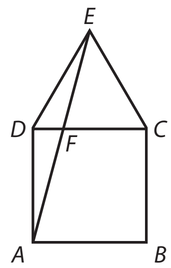
1. **Na obrázku 1 je pravidelný pětiúhelník *ABCDE* s vyznačenými úhlopříčkami *CE*, *BE* a *BD*. Bod *F* je průsečík *CE* a *BD*. Urči velikosti úhlů: $\sphericalangle DBE$, $\sphericalangle CBE$, $\sphericalangle DBA$, $\sphericalangle BAE$, $\sphericalangle BAF$, $\sphericalangle EFD$, $\sphericalangle AFD$.**

2. **Na obrázku 1 urči, který z trojúhelníků je podobný s trojúhelníkem *DFE*.**

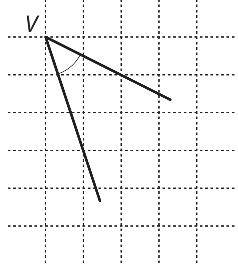
A) ΔEDB B) ΔCDF C) ΔEBF D) ΔEDC



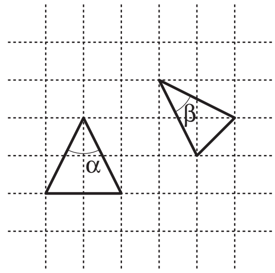
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

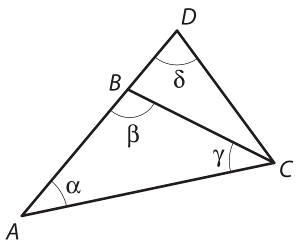
3. **Petr počítal některé úhly, které jsou přítomny na obrázku 2. Napsal: 15°, 30°, 45°, 105°. Tři výsledky jsou správně a jeden chybně. Který?**

A) 15° B) 30° C) 45° D) 105°

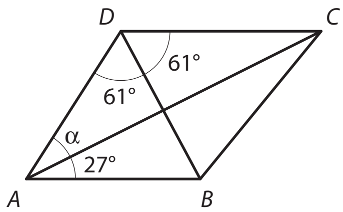
4. **Urči velikost úhlu s vrcholem *V*, který je vyznačen na čtverečkovaném papíru na obrázku 3.**

5. **Urči velikost součtu úhlů α a β na obrázku 4.**

6. **Na obrázku 5 je vyznačen bod *B* na straně *AD* trojúhelníku *ACD*. Platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Dále víme, že úhel $\delta = 70°$. Vypočti úhly α a γ.**



Obr. 5



Obr. 6

7. **Na obrázku 6 je nakreslen lichoběžník. Velikost úhlu DAC = α je**

A) 27° B) 29° C) 31° D) 34°

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

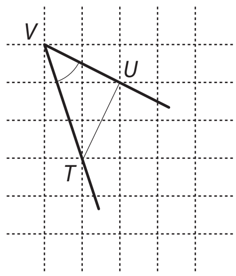
VÝSLEDKY:

1. Velikosti úhlů $|\sphericalangle DBE| = 36°$, $|\sphericalangle CBE| = 72°$, $|\sphericalangle DBA| = 72°$, $|\sphericalangle BAF| = 54°$, $|\sphericalangle BAE| = 108°$, $|\sphericalangle EFD| = 72°$, $|\sphericalangle AFD| = 126°$.

2A).

3B).

4. 45°. Na obrázku jsou body *U*, *V*, *T* vrcholy pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka.



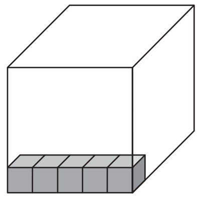
5. 90°. Snadno to zjistíme provedením grafického součtu uvažovaných úhlů.

6. $\alpha = \gamma = 35°$.

7C).

3.2.6 OBJEM

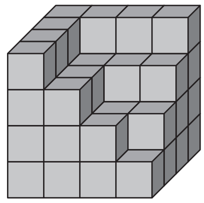
1. **Z výrobny expedují nugátové kostky v papírových dárkových krabicích. Nugátové kostky i krabice mají tvar krychle. Papírová krabice se musí těmito kostkami zcela naplnit. K jedné hraně krabice je narovnáno pět nugátových kostek (obr. 1). Kolik nugátových kostek se vejde do krabice?**



Obr. 1

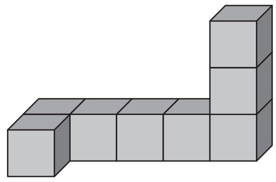
2. **Michal doplnil stavbu na obrázku 2 na krychli. Jaký nejmenší počet krychliček použil?**

   A) 12 B) 13
   C) 14 D) 15



Obr. 2

3. **Na obrázku 3 je krychlová stavba. Magda ji přestavěla na „panelák" tvaru kvádru nebo krychle. (Použila všechny kostky a žádné další k dispozici neměla.) Kolik různých typů paneláku mohla postavit?**



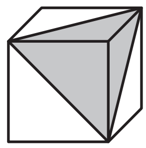
Obr. 3

4. **Zdeněk si z 5 skleněných tabulí sestrojil akvárium. Tři z nich měly rozměry 60 cm × 40 cm a dvě 40 cm × 40 cm.**

   a) Kolik litrů vody musel Zdeněk nalít, když naplnil akvárium do $\frac{2}{3}$?
   b) Do jaké výšky sahá voda, jestliže Zdeněk nalil do akvária 54 l vody?

5. **Na obrázku 4 je nakreslena krychle a šedou barvou je vyznačen trojboký jehlan. Jakou částí krychle je vyznačený trojboký jehlan?**

   A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$



Obr. 4

6. **První krychle je postavena z 8 krychlových kostek, druhá ze 27, třetí ze 64 a čtvrtá ze 125. Každou krychli budeme přestavovat na hranoly tak, že použijeme pokaždé všechny kostky. Vyber tu, ze které můžeš postavit nejvíce hranolů.**

   A) první B) druhá C) třetí D) čtvrtá

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1. 125 nugátových kostek.
2C).
3. 6 možností.
4a) 64 l;
4b) 22,5 cm.
5B).
6C).

3.3 POLOHA A ZMĚNA POLOHY

3.3.1 GRAF LINEÁRNÍ FUNKCE

1. **Žáci si kupovali v papírnictví sešity. Každý desátý sešit byl zdarma. Doplň tabulku a nakresli příslušný graf závislosti ceny v korunách na počtu zakoupených sešitů.**

Počet kusů sešitů	1	9	10	11	19	20	30
Cena v Kč	23						

2. **Když jedeme autem z podhůří do hor, spotřebujeme na 100 km 18 l benzínu. Když jedeme opačně z hor dolů, spotřeba klesá na 4 l benzínu na 100 km. Nejdříve jsme jeli 75 km nahoru a pak tu samou vzdálenost dolů. Doplň tabulku a narýsuj graf závislosti množství spáleného benzínu na počtu ujetých kilometrů.**

Počet ujetých km	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
Spotřeba benzínu v l										

3. **Cena za jízdu taxíkem se skládá ze tří položek. První je nástupní cena, ta je 25 Kč. Druhá je cena za čas, ta je 5 Kč za každou započatou minutu. Třetí složkou je cena za km, ta je 30 Kč. Nastoupili jsme v 9:00 hod. Do 9:35 jsme ujeli 14 km, do 9:45 jsme čekali a do 10:00 jsme ujeli dalších 6 km.**

a) Doplň tabulku.
b) Nakresli modrou graf závislosti km na čase.
c) Nakresli červenou graf závislosti Kč na čase.
d) Zakresli graf závislosti km na Kč.

Čas	9:00	9:05	9:10	9:15	9:20	9:25	9:30	9:35	9:45	9:50	9:55	10:00
km												
Kč												

✂ ------------------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------ ✂

VÝSLEDKY: Grafy viz níže.

1.

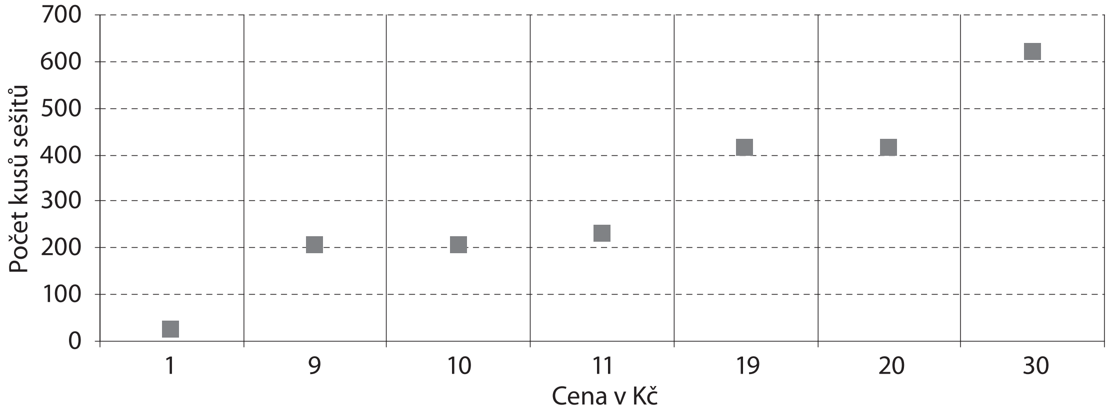
Počet kusů sešitů	1	9	10	11	19	20	30
Cena v Kč	23	207	207	230	414	414	621

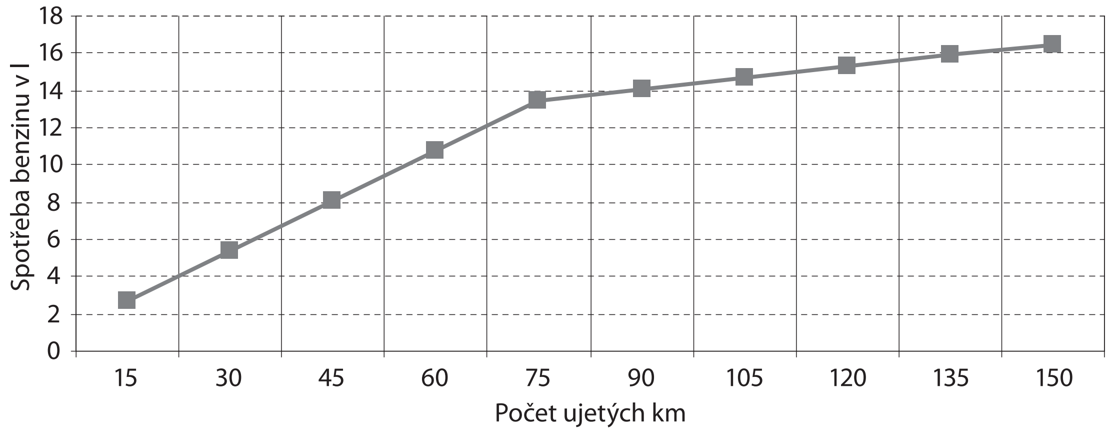
2.

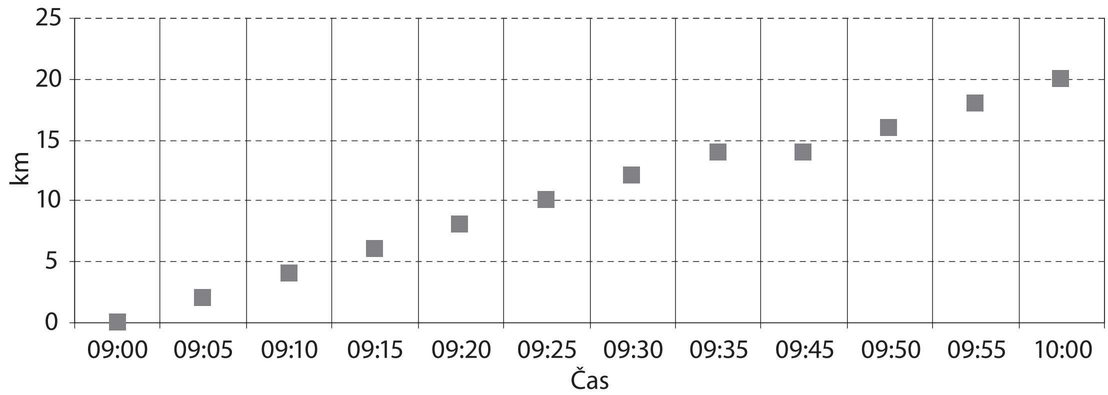
Počet ujetých km	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
Spotřeba benzínu v l	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	14,1	14,7	15,3	15,9	16,5

3a)

Čas	9:00	9:05	9:10	9:15	9:20	9:25	9:30	9:35	9:45	9:50	9:55	10:00
km	0	2	4	6	8	10	12	14	14	16	18	20
Kč	25	110	195	280	365	450	535	620	670	755	840	925


Počet kusů sešitů
700
600
500
400
300
200
100
0
1
9
10
11
19
20
30
Cena v Kč


Spotřeba benzinu v l
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
15
30
45
60
75
90
105
120
135
150
Počet ujetých km


km
25
20
15
10
5
0
09:00
09:05
09:10
09:15
09:20
09:25
09:30
09:35
09:45
09:50
09:55
10:00
Čas

3.3.2 ROVNICE PŘÍMKY

1. Graf lineární závislosti prochází body *A* [-2; 0], *B* [0; 6]. Vytvoř tabulku této závislosti a z nabízených možností vyber její správný předpis.

x			-2		0			
y			0		6			

A) $y = 6x$ B) $y = 3x + 6$ C) $y = -2x$ D) $y = 6x - 2$

2. Přímka *p* je dána rovnicí $p : 3y + 2x - 1 = 0$. Do tabulky zapiš souřadnice některých bodů na přímce *p* a přímku načrtni.

x		-1	0	1	2							*t*	
y							-1	0	1	2			*s*

3. V tabulce je uvedeno 10 uhlovodíků. Sleduj závislost počtu atomů vodíku na počtu atomů uhlíku. Načrtni graf a sestav rovnici této závislosti.

Počet atomů										
uhlíku	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
vodíku	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Souhrnný vzorec	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}	C_5H_{12}	C_6H_{14}	C_7H_{16}	C_8H_{18}	C_9H_{20}	$C_{10}H_{22}$

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1B);**

x	-4	-3	-2	1	0	2	3	4
y	-6	-3	0	3	6	9	12	15

2.

x	…	-1	0	1	2	…	2	1/2	-1	5/2	…	*t*	(1 – 3*s*)/2
y	…	1	1/3	2/3	-1	…	-1	0	1	2	…	(1–2*t*)/3	*s*

3. $y = 2x + 2$, kde $x \in \{1, \ldots, 10\}$ je počet atomů uhlíku a *y* je počet atomů vodíku.

Počet atomů	methan	ethan	propan	butan	pentan	hexan	heptan	oktan	nonan	dekan
uhlíku	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
vodíku	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Souhrnný vzorec	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}	C_5H_{12}	C_6H_{14}	C_7H_{16}	C_8H_{18}	C_9H_{20}	$C_{10}H_{22}$

3.3.3 GRAF LINEÁRNÍ FUNKCE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

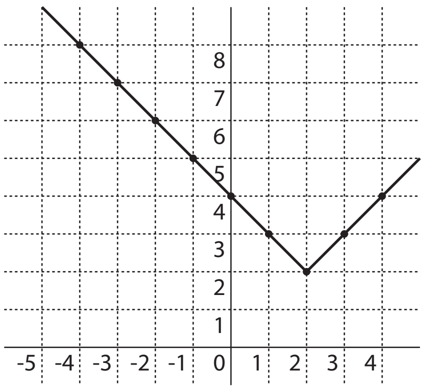
1. Čísla -5, -4, -3, ..., 5, 6 jsou uvedena v horním řádku tabulky.

a) Zapiš do druhého řádku tabulky vzdálenost každého z čísel od čísla 0 a
b) do třetího řádku vzdálenost každého z čísel prvního řádku od čísla 1.

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
Vzdálenost od 0	5					0							
Vzdálenost od 1	6												

c) Napiš předpis závislosti čísel druhého řádku tabulky na číslech prvního řádku.
d) Napiš předpis závislosti čísel třetího řádku tabulky na číslech prvního řádku.
e) Znázorni grafy obou závislostí.

2. Graf funkce *f*, která je definována pro všechna reálná *x*, se skládá ze dvou polopřímek a je načrtnutý na obrázku.



a) Do tabulky dopiš souřadnice všech v grafu vyznačených bodů.

x	-4									4	
y	8										

b) Nalezni slovní popis této funkce.

Slovní popis ....

c) Nalezni její předpis.

Předpis funkce ....

3. Je dána funkce: $y = x + |x|$. Doplň tabulku a načrtni její graf.

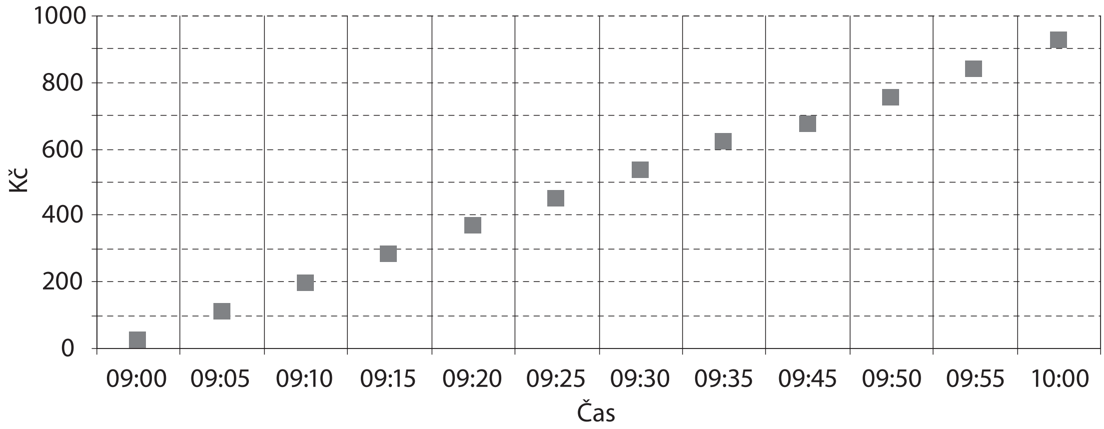
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0									

✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

VÝSLEDKY: **1a), b)** tabulka:

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
Vzdálenost od 0	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	
Vzdálenost od 1	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	

1c) $y = |x|, x \in \{-5, -4, \ldots, 5, 6\}$;
1d) $y = |x - 1|, x \in \{-5, -4, \ldots, 5, 6\}$;
1e) je uveden pouze graf druhé závislosti.

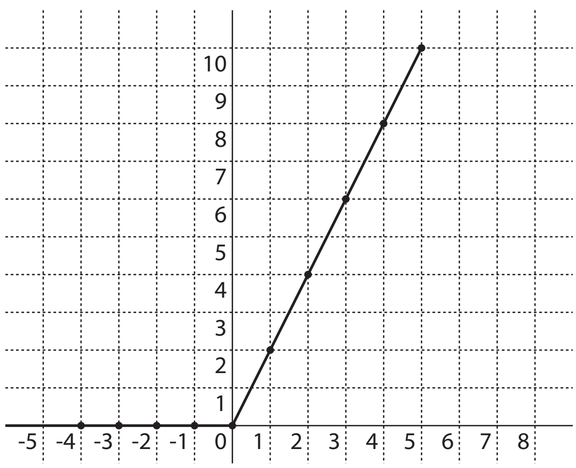


2a) tabulka:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	8	7	6	5	4	3	2	3	4	5

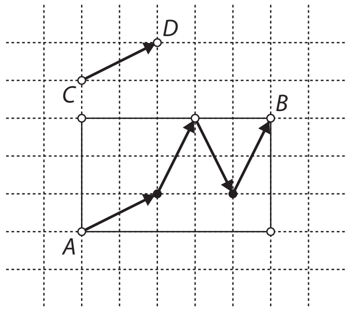
2b) Slovní popis: Vzdálenost čísla x na číselné ose od čísla 2 zvětšená o 2.
2c) Předpis: $y = |x - 2| + 2$
3.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	0	0	0	0	2	4	6	8	10



3.3.4 POSUNUTÍ JAKO PROPEDEUTIKA VEKTORU A BÁZE

1. V obdélníku 5 × 3 hledáme cestu z vrcholu *A* do vrcholu *B*. Cestujeme pouze po některé úhlopříčce obdélníku 2 × 1 (např. CD) nebo 1 × 2. Jedna cesta je vyznačena na obrázku. Nalezni jinou takovou cestu z bodu *A* do bodu *B*.
Poznámka: Dvě cesty považujeme za různé, když se alespoň v jednom kroku liší.

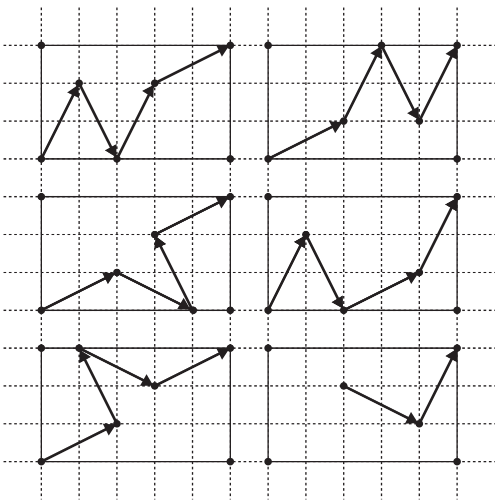


2. Kolikrát nejméně použijeme úhlopříčku obdélníku 2 × 1 nebo 1 × 2, chceme-li se stejným způsobem dostat z levého dolního vrcholu do pravého horního vrcholu v obdélníku 6 × 4, 7 × 5 ...? Jak se změní situace u obdélníku 5 × 4, 6 × 4, 7 × 4 ...? Uspořádej výsledky do tabulky:

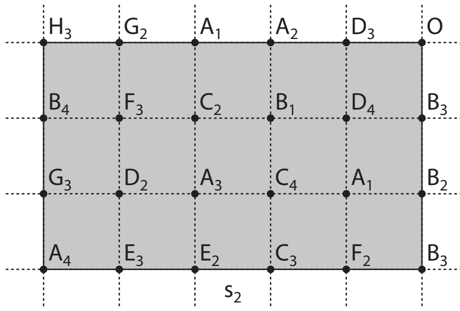
Obdélník	3 × 1	4 × 2	5 × 3	6 × 4	7 × 5	8 × 6	9 × 7	10 × 8	11 × 9	12 × 10
Počet úhlopříček			4							
Obdélník	3 × 3	4 × 3	5 × 3	6 × 3	7 × 3	8 × 3	9 × 3	10 × 3	11 × 3	12 × 3
Počet úhlopříček										

✂ ------------------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------ ✂

VÝSLEDKY: **1.** Ano, existuje mnoho cest, ale vždy za použití čtyř nebo více úhlopříček CD, na obrázku č. 1 je několik možností vyznačeno. Dolní index u bodů na obrázku č. 2 znamená nejmenší možný počet kroků, který zbývá k dosažení bodu 0.



Obr. 1



Obr. 2

2.

Obdélník	3 × 1	4 × 2	5 × 3	6 × 4	7 × 5	8 × 6	9 × 7	10 × 8	11 × 9	12 × 10
Počet úhlopříček	2	2	4	4	4	6	6	6	8	8
Obdélník	3 × 3	4 × 3	5 × 3	6 × 3	7 × 3	8 × 3	9 × 3	10 × 3	11 × 3	12 × 3
Počet úhlopříček	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7

KOMENTÁŘE KE GEOMETRICKÝM ÚLOHÁM

Komentáře nebylo vzhledem k většímu rozsahu úloh možné umístit přímo na příslušnou stranu. Uvádíme je proto zde souhrnně.

3.1.1

1. Úloha je zaměřena na trojúhelníkovou nerovnost a na rozklad čísla 9 na tři sčítance. Nalezení všech řešení spadá do oblasti kombinatoriky. Ze sedmi rozkladů čísla 9 na tři sčítance je pak třeba vybrat pouze čtyři, které splňují trojúhelníkovou nerovnost. Například tři čísla (5, 3, 1), která jsou rozkladem čísla 9, nemohou být délkami stran, neboť nesplňují trojúhelníkovou nerovnost. Pro zdatnější žáky se zde nabízí otázka z oblasti pravděpodobnosti. Když budeme náhodně tvořit trojice úseček z devíti zápalek, je pravděpodobnější, že z nich bude možné sestavit trojúhelník, anebo že trojúhelník sestavit nepůjde?

2. Důležité je uvědomit si, že strana délky 5 cm může být jak ramenem (11 = 5 + 5 + 1), tak i základnou (11 = 5 + 3 + 3). Žáci často chybují v tom, že danou stranu považují pouze za základnu.

3. Pravděpodobně nejobtížnější bude dokázat, že ΔACD a ΔACE jsou pravoúhlé. K určení pravého úhlu při vrcholu *E*, resp. *D* postačí znalost, že úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé a dvě protější strany rovnoběžné.

4. Ciferník nabízí učiteli poměrně bohaté geometrické prostředí na poznávání trojúhelníků i dalších mnohoúhelníků – viz další dvě strany.

3.1.2

1. Úlohu je vhodné doplnit diskusí o čtyřúhelnících, které pomocí ciferníku nelze vyznačit. Je to například kosočtverec, kosodélník, nekonvexní čtyřúhelník, pravoúhlý nebo nerovnoramenný lichoběžník, deltoid s nejvýše jedním vnitřním úhlem pravým. Jednoduše řečeno se jedná o čtyřúhelníky, které nejsou tětivové.

2. Pro někoho může být překvapivé, že hovoříme o kolmosti úseček, které nemají žádný společný bod. Jejich úhel se měří jako úhel přímek, na nichž dané úsečky leží, tj. jsou nositelkami daných úseček.

3. a **4.** V úlohách jde o tzv. chirurgii mnohoúhelníků. To znamená, že se daný mnohoúhelník přetvoří na jiný tak, že se jeho část ustřihne a přiloží někam jinam. Zpočátku je důležité takové úlohy řešit manipulativně. Cílem sice je, aby žáci řešili tyto úlohy pouze v představách, proces od manipulací k představám však v žádném případě nelze urychlit a bez ohledu na věk žáků je nutné v případě potřeby ponechat možnost manipulace. Pokud učitel žákům nedovolí manipulovat a naléhá na mentální řešení, obvykle se rozvoj představ zabrzdí, popřípadě zcela zablokuje.

3. Účinná je strategie řešení odzadu, tzn. vyjít od kosočtverce a ten rozstřihnout na dvě části, z nichž lze sestrojit obdélník.

4. V úloze hraje roli otáčení o 180° neboli středová souměrnost. Po sestrojení příslušného obrázku se navíc ukáže, že součet základen lichoběžníku je roven dvojnásobku jeho střední příčky, tedy že střední příčka lichoběžníku je aritmetickým průměrem. Obvody čtyřúhelníků je možné zjišťovat měřením. Lze také použít tento vztah: Obvod lichoběžníku se rovná $(a + b + c + d)$ a obvod kosodélníku se rovná $2(a + c) + d$. Z toho vyplývá, že obvody obou čtyřúhelníků se budou rovnat, když $b = a + c$, což je případ posledního lichoběžníku na obrázku.

3.1.3

1. Geometrie ciferníku (zmíněná již v 3.1.1 i 3.1.2) propojuje geometrii s aritmetikou (kódování jmen mnohoúhelníků pomocí číslic, dělitelnost, pravidelnosti, řady, počítání ve dvanáctkové i šedesátkové soustavě). Budeme-li spojovat na ciferníku čísla, jejichž rozdíl je stejný a není dělitelem 60, vzniká zajímavý obraz. Ten je vizualizací jisté aritmetické řady, která se láme číslem 60. Když se řada zacyklí (začne se opakovat), lomená čára, jež vzniká spojováním příslušných čísel na ciferníku, se uzavře. Vizualizací aritmetických jevů a naopak uchopením geometrických jevů nástroji aritmetiky dává učitel žákům s různým typem myšlení větší příležitost proniknout do problému.

5. Úloha je zaměřena na rozvoj pojmu úhlopříčka. U nekonvexního obrazce je alespoň jedna úhlopříčka vně obrazce. To, že strana může být částí úhlopříčky, bývá pro žáky překvapivé. Obrázek pro řešení podotázky a) je vhodné kreslit na čtverečkovaný papír, kde se kolmost nesousedních stran dobře vyznačuje.

3.1.4

1. Úlohu je možné rozšířit hledáním počtu nepravidelných 2D útvarů. Je zde 24 kosočtverců, 24 kosodélníků, 42 rovnoramenných lichoběžníků. U lichoběžníků je možné určovat délku střední příčky. Z případů, kdy střední příčka je tvořena stranami trojúhelníků, je možné snadno vyvodit, že střední příčka lichoběžníku je aritmetickým průměrem jeho dvou základen.

3. Úloha je poměrně pracná a je možné ji zjednodušit menším počtem použitých dlaždic a zmenšením jejich rozměrů. Doporučujeme, aby si žáci při řešení úlohy udělali tabulku, kam budou psát spotřebu dlaždic, tvar, který vyskládají, a obvod. Žáci zjistí, že čím více se obdélník blíží čtverci, tím má menší obvod. Při použití 6 dlaždic dostanou čtverec s rozměry 24 cm × 24 cm. Při použití 24 dlaždic dostanou čtverec s rozměry 48 cm × 48 cm. V úloze je přítomen aritmetický jev společný násobek a z geometrie vazba mezi obsahem a obvodem.

3.1.5 Doporučujeme řešení úloh pomocí manipulace včetně modelování těles (u úlohy 2). V úlohách se propojuje geometrie a kombinatorika.

3. Náročnější úloha. Pentamino C je částí kterékoli ze sítí 6B, 6C, 6E a 6F. Ale pentamino K může být částí pouze sítě 6F. (Obrázky sítí viz výsledky na straně 3.1.6.)

5. Především nutno rozhodnout, zda dva útvary, z nichž jeden je zrcadlovým obrazem druhého, budeme považovat za stejné, nebo různé. Přesně řečeno, zda za stejné považujeme pouze přímo shodné útvary, nebo i útvary nepřímo shodné. Vzhledem k tomu, že žák pracuje s papírovým modelem, a zde na sebe lze přiložit jak přímo, tak i nepřímo shodné útvary, budeme i nepřímo shodné útvary považovat za shodné. Upozorňujeme, že v prostoru to tak snadné není. Zde budou žáci pravou i levou botu považovat za různé objekty. Náročné je dokázat, že žádné další tetramino neexistuje. Lze to udělat postupným přidáváním monomina. Především je jasné, že bimino je jediné. K němu lze dvěma různými způsoby přidat monomino. Tedy trimina jsou dvě. Nyní ke každému přidáme ještě jedno monomino všemi možnými způsoby. Tím získáme pět tetramin uvedených ve výsledcích.

3.1.6 V úloze o sítích krychle M43 (M02-09) v šetření TIMSS 2007 (která je mimochodem problematicky formulovaná) naši žáci uspěli dobře. Proto zde uvádíme i náročnější úlohy.

1. Úlohu řešíme strategií „jdi okolo“. Žáci si označí všechna místa, kam lze čtverec přiložit, a každý případ vyšetří. Jiná strategie, „odzadu“, vezme všech 11 sítí a pro každou bude zjišťovat, zda dané pentamino je její částí. Obdobné strategie lze využít v úloze 2, přičemž strategie „odzadu“ je účinnější.

4. Náročné je uvědomit si, že daná síť (tj. síť 6C) se též dá vytvořit přelepením jednoho čtverce jinam.

5. V sítích krychle se rozlišují dva typy hran krychle. Jeden typ vznikne pouze ohnutím čtverců sítě – ty jsou označeny tlustě. Jestliže budeme nahlížet na síť krychle jako na „střih“ na oblek pro krychli, budou tyto hrany v této metaforické terminologii pojmenovány jako „švy“. Druhý typ hran vznikne tím, že spojíme dvě strany dvou čtverců – v našem metaforickém jazyce to budou „zipy“.

3.1.7 **1.** Úlohu je možné rozšířit tím, že do některé sítě doplníme číselné údaje (např. rozměry obdélníkové stěny jsou 3 × 5) a budeme požadovat výpočet povrchu i objemu tělesa. V analogické úloze TIMSS M57 (M05-04) uspělo méně než 30 % našich žáků.

2. Žáci, kteří řešení této úlohy nevidí ihned, potřebují více manipulativních zkušeností s tělesy. Doporučujeme dát jim úkol vytvořit modely těchto těles. Naopak žáci, kteří jsou zde velice dobří, mohou počítat povrchy i objemy těchto těles, když dodáme jejich rozměry:

A – podstavná hrana má délku 10 cm, boční hrana 13 cm, povrch tělesa je 340 cm^2 a objem je $\frac{100 \cdot \sqrt{119}}{3} \approx 363{,}6$ cm^3;

B – všechny hrany mají délku 3 cm; povrch tělesa je $3 \cdot \sqrt{3}$ cm^2 a objem je $2{,}25 \cdot \sqrt{2} \approx 3{,}18$ cm^3;

C – náročnou úlohou je určit objem i povrch, když podstavná hrana je a.

3. Pro šikovné žáky jsou tyto úlohy lehké. Je možné jim dát úkol zjistit povrch i objem těles, a to buď s konkrétními čísly, nebo obecně. Pro trojboký hranol D doporučujeme volit všechny hrany například 30 mm. Pro osmiboký hranol E doporučujeme podmínku: je vložen do krychle o hraně 26 mm.

3.1.8 Označíme v počet vrcholů, h počet hran a s počet stěn krychlového tělesa.

1. V úloze jde o to, aby žáci poznali, že mají-li dva z údajů v, h, s stejné, mají i třetí údaj stejný. Tedy mají získat podezření, že mezi těmito údaji existuje nějaká vazba.

3.2.1 Mřížovým bodem nazýváme průsečík svislé a vodorovné linky čtverečkovaného papíru. Úsečka, která má oba koncové body v mřížových bodech, se nazývá mřížová. V úlohách TIMSS se pracuje s mřížovými obrazci například v M44 (M01-11), M65 (M07-13), M61 (M02-11) a M63 (M07-10).

1. Znaky +, – a ! u délek úseček do jisté míry závisí na tom, kdo a čím měří. Znaky pomáhají žákům pochopit rozdíl mezi geometrií řemeslnou (kde na malé chybě nezáleží) a geometrií teoretickou, kde vše počítáme zcela přesně. Když zaokrouhlujeme (například $\sqrt{2}$ na 1,4), musíme si tuto skutečnost uvědomit. Děláme to tak, že místo rovnítka = zde píšeme ≈.

Žáci získávají zkušenost, že většinu „šikmých“ úseček nelze změřit přesně na celé milimetry. U některých úseček lze očekávat mezi žáky spory. Například úsečka b měří na centimetrovém papíru přibližně 36,06 mm a měřením lze těžko zjistit, zda to má být 36^+ nebo 36^- nebo $36^!$. To v některých žácích vzbudí zvědavost, jak lze spor rozhodnout. Později na stránce 3.2.3 se žáci naučí zjistit obsah mřížového čtverce. To pak může pomoci rozhodnout o správnosti měření. Čtverec nad touto úsečkou má obsah 1 300 mm^2. Kdyby délka úsečky byla $36^!$, byl by obsah daného čtverce 1 296 mm^2. Z toho vyplývá, že správné měření bylo 36^+.

2. U trojúhelníku ABC je zajímavá úsečka AB. Její délka činí asi 50,99 mm. Je veliká pravděpodobnost, že se najdou žáci, kteří budou tvrdit, že $|AB| = 51^!$. To opět motivuje žáky k hledání cest, jak přesnost měření prověřit teoreticky.

3. Žáci poznávají myšlenku, že když zaokrouhlujeme větší číslo, a to pak dělíme, zmenšuje se tím i chyba při měření.
4. Tvrzení $|KL| = |KM|$ lze dokázat několika způsoby – doplněním na trojúhelník, o kterém se dokáže, že je rovnoramenný; doplněním na rovnoběžník, o němž se dokáže, že to je kosočtverec; dokreslením čtverců k daným úsečkám a zjištěním jejich obsahu.

3.2.2 V úloze M55 (M01-12) v šetření TIMSS bylo potřebné zjistit obsah trojúhelníku. Naši žáci nedopadli dobře. Mnozí žáci (zřejmě více než 75 %) o obsahu nemají dobrou představu a vztahují tento pojem pouze ke vzorci. Proto uvádíme sérii úloh, v nichž je třeba s obsahem pracovat mimo vzorce. Zde žák obsah zjišťuje krájením útvaru, na následující straně pak rámováním útvaru. I když zde obě metody používají žáci pro mřížové mnohoúhelníky, úlohy tohoto typu významně přispívají k dobrému porozumění pojmu obsah mnohoúhelníku. Navíc úlohy obohacují žákovu představu poznáváním čtverců, které nejsou ve vertikálně-horizontální poloze. Doporučujeme, aby učitel dal žákům úlohu takový čtverec narýsovat, když je dána jeho strana (úhlopříčka). Tato zkušenost se pak zužitkuje na straně 3.2.4.

3.2.3 Metoda rámování je pro žáky náročnější než metoda řezání.

6. Je zajímavé, že když žáci zjistí, že v úloze a) se bod C může pohybovat po vodorovné přímce kamkoli, tuto myšlenku nedokážou přenést na případ b). Pro mnohé je to zcela nová úloha a řeší ji opět metodou pokus omyl. Když ale zjistí, že se jedná opět o rovnoběžku se stranou BC, pak úlohu c) již vyřeší rychle.

3.2.4 Návrat k situacím ze strany 3.2.1. Tam jsme měřením nacházeli hodnoty přibližné a nebyli jsme si jisti, zda některá z nich není přesná. Tentokráte již délky úseček nacházíme přesně, pomocí odmocnin.

3.2.5 Nízká úspěšnost našich žáků v úloze M51 (M04-10) si vyžádala více cvičení s různorodými geometrickými situacemi zdůrazňujícími pojem úhlu.

3.2.6 V úloze M57 (M05-04) věnované objemu úspěšnost našich žáků i mezinárodní úspěšnost byly nízké. Příčinu vidíme v tom, že o objemu nemají žáci většinou správnou představu a omezují svá řešení na aplikaci vzorců. Proto se zde snažíme budovat představu objemu.

5. Lze očekávat, že žáci za podstavu zvolí rovnostranný trojúhelník. To vede k dlouhému počítání. Když délku hrany krychle označíme a, bude strana rovnostranného trojúhelníku $a\sqrt{2}$ a obsah podstavy $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$. Výška jehlanu je třetina tělesové úhlopříčky krychle, tedy $\frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3}$. Odtud objem jehlanu je $\frac{a^3}{6}$. Výpočet je podstatně rychlejší, když za podstavu bereme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s obsahem $\frac{a^2}{2}$ a výškou je hrana o délce a.
6. Lze očekávat, že žáci volí distraktor D, neboť zde je počet jednotek „stavebního materiálu“ největší – je to 125 kostek. Jenže to není pravda. Jestliže p je jakékoli prvočíslo, pak z p^3 kostek lze postavit pouze dva hranoly, a to $1 \times 1 \times p^3$, $1 \times p \times p^2$, a pochopitelně pak i krychli $p \times p \times p$. V úloze jsou v distraktorech A, B i D délky hrany krychle prvočísla. Proto je řešením případ C.

3.3.1

1. Cena 9 sešitů je stejná jako cena 10 sešitů, cena 19 sešitů je stejná jako 20 sešitů a cena 29 sešitů je stejná jako cena 30 sešitů. Závislost je diskrétní, protože nekupujeme například 0,31 sešitu. Proto je grafem soubor bodů.
2. Závislost je spojitá, proto je grafem spojitá čára.
3. Složitost úlohy spočívá v prolnutí tří podmínek a harmonogramu jízdy.

3.3.2

1. Úloha se skládá ze dvou částí. V první žák doplní tabulku, ve druhé volí odpověď.
2. Tabulku lze doplnit tak, že daný vztah upravíme na $y = \frac{1 - 2x}{3}$ a $x = \frac{1 - 3y}{2}$.
3. Názvy uhlovodíků: methan, ethan, propan, butan, pentan, hexan, heptan, oktan, nonan, dekan.

3.3.3

1. Při práci s funkcemi a jejich grafy se často nebere v úvahu definiční obor. Žák vyvodí předpis druhé závislosti $y = |x - 1|$, ale neuvede, že $x \in \{-5, -4, \dots, 4, 5, 6\}$. Když kreslí graf, nakreslí dvě polopřímky, nikoli 12 bodů.
2. Funkce v předchozí úloze byla definována pouze pro 12 bodů, funkce v této i následující úloze je definována pro všechna reálná x. Zde je funkce dána grafem, v úloze 3 je dána předpisem.

3.3.4 Obě úlohy, které se vztahují ke stejnému prostředí, mají spíše charakter malého výzkumu. Hloubaví žáci vlastním šetřením naleznou nejen odpovědi na položené otázky, ale formulují i vlastní otázky (jako skuteční badatelé). Naše zkušenosti ukazují, že teoreticky zaměření žáci zde intelektuálně výrazně získávají.

4 DATA

4.1 SBĚR, ORGANIZACE A ZPRACOVÁNÍ DAT

4.1.1 SBĚR A TŘÍDĚNÍ SOUBORU DAT – POROVNÁNÍ TEXTŮ

Studna na konci světa
Byla jednou jedna stará vdova, která žila v malé chaloupce se svou jedinou dcerou, a to vám bylo tak pěkné děvče, že byla radost se na ni podívat.
Jednoho dne si stařenka vzala do hlavy, že upeče plnou mísu, event. pekáč lívanečků. A tak si na stůl připravila vál a potom šla do spíže a přinesla mísu mouky. Když ale chtěla přinést džbánek vody, aby ji smíchala s tou moukou, zjistila, že doma žádnou nemá.

The Well on the World's End
There was once an old widow woman, who lived in a little cottage with her only daughter, who was such a bonnie lassie that everyone liked to look at her.
One day the old woman took a notion into her head to bake a girdleful of cakes. So she took down her bakingboard, and went to the meal-chest and fetched a basinful of meal; but when she went to seek a jug of water to mix the meal with, she found that there was none in the house.

Zjisti, z kolika písmen se skládá každé slovo v českém (Č) i anglickém (A) textu, a vyplň následující tabulku.

Počet písmen ve slově	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 a víc
Počet slov – Č										
Počet slov – A	5	14	28	23	13	4	2	3		

a) Sestroj sloupcový graf znázorňující zastoupení slov podle počtu písmen v Č a A.
b) Porovnej rozdělení četností slov podle počtu písmen v Č a A. Výsledky zdůvodni.

....

c) Vyhledej v obou textech předložky a porovnej četnosti jejich výskytu v Č a A. Zdůvodni rozdíl.

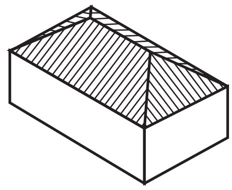
....

✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

VÝSLEDKY: Tabulka – Počet slov Č: 6, 15, 9, 13, 17, 7, 5, 4, 2, 1; Počet slov A: 5, 14, 28, 23, 13, 4, 2, 3, 1, 1;
b) největší četnost mají tří- a čtyřpísmenná slova v A (členy a zájmena), v Č jsou to dvoj-, čtyř- a pětipísmenná slova (předložky, zvratná zájmena, částice, slovesa a podstatná jména);
c) předložky jsou v A výrazně početnější oproti Č. Čeština na rozdíl od angličtiny používá koncovky.

KOMENTÁŘ: Úloha od žáků vyžaduje pozornou práci s textem, dobrou organizaci evidence a třídění údajů pro doplnění tabulky, vizualizaci grafem. Ukazuje, jak statistika v souvislosti s gramatikou může dávat zajímavé výsledky. Dále je nutné rozhodnout o choulostivých případech. Například v českém textu rozhodnout, zda hláska ch je jedno písmeno, nebo dvě písmena (my jsme volili druhou možnost), nebo zda výraz *meal-chest* v angličtině brát jako dvě slova, nebo jako jedno slovo (my jsme volili druhou možnost).

4.1.2 PRŮMĚR I



1. **Valbová střecha (viz obrázek – má dvě části tvaru rovnoramenného lichoběžníka a dvě části tvaru rovnoramenného trojúhelníka) musí být v polovině své výšky vyztužena čtyřmi trámy rovnoběžně s okraji stropu. Hřeben střechy je dlouhý 17 m, celý dům je 23 m dlouhý a 8 m široký. Jak dlouhé trámy jsou potřeba?**

2. **V tabulce jsou uvedeny výsledky fotbalové ligy po ukončení sezóny 2008/2009:**

pořadí	tým	zápasy	výhry	remízy	prohry	skóre	body
1	SLAVIA	30	18	8	4	57:25	62
2	SPARTA	30	16	8	6	48:25	56
3	LIBEREC	30	14	10	6	41:28	52
4	OLOMOUC	30	13	9	8	39:36	48
5	JABLONEC	30	14	4	12	43:37	46
6	ML. BOLESLAV	30	12	10	8	39:38	46
7	TEPLICE	30	12	7	11	33:25	43
8	PLZEŇ	30	11	10	9	45:38	43
9	OSTRAVA	30	11	6	13	38:36	39
10	Č. BUDĚJOVICE	30	7	15	8	30:37	36
11	BRNO	30	9	8	13	32:36	35
12	PŘÍBRAM	30	9	7	14	30:40	34
13	BOHEMIANS	30	10	4	16	33:46	34
14	KLADNO	30	8	7	15	21:41	31
15	ZLÍN	30	7	8	15	26:49	29
16	ŽIŽKOV	30	5	7	18	27:45	22

a) Kolik zápasů celkem bylo odehráno během celé sezóny (podzimní i jarní část)?
b) Kolik gólů bylo průměrně vstřeleno na zápas?
c) Jaký je průměrný počet vstřelených gólů na jedno mužstvo?
d) Kolik družstev má poměr skóre lepší než 6:5?

3. **Maminka koupila jeden šestikilogramový prášek na praní za 326 Kč a 1,9 kg balení stejného prášku za 109 Kč.**

a) Které balení je výhodnější?
b) Doma obě balení maminka nasypala do jednoho kbelíku. Jaká je průměrná cena prášku na jedno vyprání, jestliže se na jedno praní používá dávka 125 g?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:
1. 2 trámy po 20 m a 2 trámy po 4 m.
2a) 8 · 30 = 240 zápasů;
2b) 582 vstřelených gólů, tj. průměr na zápas 2,425;
2c) Průměrný počet vstřelených branek na jedno družstvo je 36 (36,375);
2d) pouze 4 družstva: na 1., 2., 3. a 7. místě.
3a) 6kg balení: 54,3 Kč/kg, 1,9kg balení: 57,4 Kč/kg;
3b) 6,9 Kč/125g.

4.1.3 **PRŮMĚR II**

1. **Ve třídě 8.A je 30 žáků, z toho je 13 dívek a 17 chlapců. Dívky mají průměr známek z matematiky 1,77 a chlapci 2,12.**

   Průměr známek z matematiky v celé třídě je _______ .

2. **Chovatel králíků zvážil všechny své králíky jednoho po druhém. Zjistil, že 5 králíků má stejnou hmotnost 3,5 kg, 3 králíci po 2,9 kg, 2 králíci po 2,8 kg. Nejstarší samec má hmotnost 4,6 kg, 4 mladí králíci po 0,8 kg a 5 mladých po 0,7 kg.**

   a) Průměrná hmotnost dospělých králíků je _______ kg.

   b) Průměrná hmotnost mladých králíků je _______ kg.

3. **Volejbalové družstvo žen má 12 členek. Jejich výšky v cm jsou: 195, 192, 187, 187, 186, 181, 180, 180, 174, 172, 169 a 167. Trenér sestavoval šestičlenná družstva, jejichž průměrná výška byla přesně 182 cm. Sestav aspoň jedno takové družstvo, ve kterém**

   a) je nejvyšší i nejnižší hráčka,
   b) je nejvyšší a není nejnižší hráčka,
   c) je nejnižší a není nejvyšší,
   d) není ani nejvyšší ani nejnižší.
   e) Jaká je průměrná výška členky volejbalového družstva?

4. **Za poslední pololetí Gábina získala v zeměpise známky 4, 3, 2, 1, 3.**

   a) Jaká známka jí vychází?
   b) Jak musí napsat test, jehož známka se počítá dvojnásobně, aby dostala na vysvědčení dvojku?
   c) Může si vše pokazit a dostat nakonec čtverku?

5. **V dějepise mi vycházela průměrná známka 1,4 a při posledním zkoušení jsem dostal pětku, což mi zvýšilo průměr na 2,0. Jakými známkami jsem mohl být průběžně hodnocen?**

6. **Honza si opravil angličtinu z 2 na 1, a tím se jeho průměr zlepšil z 1,55 na 1,45. Splnil tak podmínku pro získání vyznamenání. Z kolika předmětů byl hodnocen a jaké známky měl na vysvědčení? (Průměr je zaokrouhlen na dvě desetinná místa.)**

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1. 1,97;
2a) 3,3 kg;
2b) 0,74 kg.
3a) např. (195, 192, 186, 180, 172, 167);
3b) (195, 187, 186, 181, 174, 169) nebo (195, 187, 187, 180, 174, 169);
3c) (192, 187, 186, 180, 180, 167);
3d) (192, 187, 187, 180, 174, 172) nebo (192, 187, 186, 181, 174, 172);
3e) 180,83 cm.
4a) Průměr je 2,60 – vychází jí trojka;
4b) musí dostat alespoň dvojku, průměr pak bude 2,43;
4c) při nedostatečném zvládnutí posledního testu může dostat nakonec nejhůře trojku.
5. 5 známek, (1, 1, 1, 2, 2) nebo (1, 1, 1, 1, 3);
6. Z 11 předmětů, 5 dvojek a 6 jedniček.

4.1.4 **ANKETA**

V naší třídě jsme udělali průzkum oblíbenosti zpěváků Aleše (A), Báry (B), Cyrila (C), Dany (D) a Emila (E). Každý žák mohl rozdělit mezi zpěváky 5 bodů. Ankety se účastnilo 9 dívek a 6 hochů. Tabulka ukazuje, jak hlasovali.

	DÍVKY									**HOŠI**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	2	1	0	0	2	1	2	0	4	0	0	0	0	2	3
B	0	0	2	0	0	1	0	4	0	1	2	1	2	1	0
C	0	4	3	0	0	3	0	0	0	0	3	1	1	2	1
D	3	0	0	5	3	0	2	0	0	3	0	1	2	0	0
E	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	2	0	0	1

Legenda: Dívka číslo 1 dala 3 hlasy Daně a 2 hlasy Alešovi. Hoch číslo 12 dal po jednom hlasu Báře, Cyrilovi a Daně a 2 hlasy dal Emilovi.

1. **Graficky znázorni výsledky hlasování. Body od dívek vyznač červeně, body od hochů modře a celkové body vyznač černě.**

2. **Pořadí zpěváků podle dívek:** __________

3. **Pořadí zpěváků podle hochů:** __________

4. **Pořadí zpěváků celkově:** ______________

5. **Rozhodni, který výrok je pravdivý, a zdůvodni proč.**

   A) Dívky dávaly nulu častěji než hoši.
   B) Hoši spíše dávali hlas hochovi než dívce.
   C) Dívky spíše dávaly hlas dívce než hochovi.

20					
18					
16					
14					
12					
10					
8					
6					
4					
2					
	A	B	C	D	E

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:

1. Tabulka.
2. D, A, C, B, E.
3. C, B, D, A, E.
4. D, C, A, B, E.
5. Výrok A je pravdivý. Dívky daly celkem 45 čísel a z nich 26 byly nuly, tedy skoro 58 %. Výrok B není pravdivý. Od hochů získal hoch průměrně 6,6 hlasu a dívka 6,5 hlasu, což je skoro totéž. Výrok C je pravdivý, ale rozdíl není výrazný.

	d	h	s
A	12	5	17
B	7	7	14
C	10	8	18
D	13	6	19
E	3	4	7

KOMENTÁŘ: Máme zkušenosti, že ankety o nejoblíbenějšího zpěváka (herce, spisovatele, učitele, …) jsou mezi žáky velice oblíbené. Někdy je nutno pracovat s ukrytými jmény, a to přináší do šetření zajímavé prvky jak po technické, tak po motivační stránce. Například žáci posuzovali objektivitu hodnocení učitelů ve čtyřech předmětech a zjistili, že u angličtiny, kde byli děleni do dvou skupin k různým vyučujícím, byly výsledky obou učitelů dosti odlišné.

4.1.5 **VÝBĚR**

Přečtěte si následující ukázku:

Malý princ byl teď hněvem celý bledý. „Už milióny let si květiny tvoří trny. A beránci je přesto po milióny let okusují. A to není vážná věc, snažíme-li se pochopit, proč se květiny tolik namáhají, aby měly trny, když ty trny na nic nejsou? Copak boj beránků a květin není důležitý? Není to vážnější a důležitější než počítání toho tlustého červeného pána? A co když já znám květinu, jedinou na světě, protože neroste nikde jinde než na mé planetě? A co když mi tu květinu nějaký beránek rázem zničí, jen tak, jednou zrána, a ani si neuvědomí, co dělá? To že není důležité?“

Zarděl jsem se a po chvíli pokračoval: „Má-li někdo rád květinu, jedinou tohoto druhu na miliónech a miliónech hvězd, stačí mu, aby byl šťasten, když se na hvězdy dívá. Řekne si: Tam někde je má květina. Ale sežere-li beránek květinu, bude to, jako by najednou všechny hvězdy pohasly! A to že není důležité!“

Malý princ, A. de Saint-Exupéry

a) Zapište do následující tabulky, kolik je v textu slov se stejným počtem písmen a slabik (např. slovo „malý“ je dvouslabičné a má 4 písmena, přijde tedy do druhého řádku a čtvrtého sloupce).

Počet slabik	**Počet písmen**										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1											
2											
3											
4											
5											

b) Vysledujte závislost počtu písmen a počtu slabik ve slovech.
c) Kolik písmen nejčastěji tvoří trojslabičné slovo?
d) Kolikaslabičná jsou šestipísmenná slova?
e) Kolik čtyřslabičných slov je v ukázce?
f) Kolika % jsou v textu zastoupena jednoslabičná slova?

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY:
a) 9;
b) čím delší slovo, tím více slabik;
c) 7;
d) 2 a 3;
e) 12;
f) 44,1 %.

Počet slabik	**Počet písmen**										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	9	34	15	7	2						
2			3	18	16	8	2	1			
3						2	17	4			
4							3	5	3	1	
5									1	0	1

KOMENTÁŘ: Řešením úlohy žáci získávají zkušenosti s vyhledáváním dat v rozsáhlém textu a zároveň třídí data podle dvou kritérií. Ta jsou závislá a hledání této závislosti je propedeutikou pojmu korelace. Úloha slouží jako průpravná k tomu typu úloh, jaké v TIMSS 2007 zastupují M76 (M05-07) a M77 (M05-08).

4.1.6 SBĚR A TŘÍDĚNÍ DVOUPARAMETRICKÉHO SOUBORU DAT

V následujícím přehledu jsou uvedeny výšky a váhy hokejistů, kteří nás reprezentovali na OH 2010 ve Vancouveru:

Brankáři: Vokoun 184 cm, 90 kg; Štěpánek 187 cm, 71 kg; Pavelec 191 cm, 89 kg
Obránci: Blaťák 181 cm, 77 kg; Hejda 191 cm, 95 kg; Kaberle 188 cm, 91 kg; Kuba 196 cm, 103 kg; Kubina 196 cm, 104 kg; Michálek Z. 184 cm, 79 kg; Polák 186 cm, 88 kg; Židlický 180 cm, 85 kg
Útočníci: Čajánek 181 cm, 80 kg; Červenka 181 cm, 85 kg; Eliáš 185 cm, 89 kg; Erat 184 cm, 90 kg; Fleischmann 185 cm, 87 kg; Havlát 188 cm, 98 kg; Jágr 191 cm, 110 kg; Krejčí 183 cm, 80 kg; Michálek M. 188 cm, 102 kg; Plekanec 180 cm, 90 kg; Rolinek 175 cm, 78 kg; Vašíček 193 cm, 104 kg

a) Zapište do následující tabulky počty hokejistů v jednotlivých váhových kategoriích:

70–74 kg	75–79 kg	80–84 kg	85–89 kg	90–94 kg	95–99 kg	100 kg a více

b) V jaké váhové kategorii je nejvíce hokejistů?
c) Vytvořte obdobnou tabulku, do které zařadíte hokejisty podle jejich výšky. Zvolte si sami vhodný interval.

d) Zjistěte z předcházející tabulky, v jakém intervalu se nachází nejvíce hokejistů?
e) Je nejnižší hokejista také nejlehčí?
f) Je nejvyšší hokejista nejtěžší?
g) Jaká je průměrná váha a výška hokejového výběru?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **a)**

70–74 kg	75–79 kg	80–84 kg	85–89 kg	90–94 kg	95–99 kg	100 kg a více
1	3	2	6	4	2	5

b) 85–89 kg;
e) ne;
f) ne;
g) 186 cm a 89,8 kg.

KOMENTÁŘ: Řešením úlohy žáci získávají zkušenosti s orientací v rozsáhlejším souboru dat. Data vyhledávají podle určité podmínky a následně zpracovávají v dalších výpočtech. Úlohy e) a f) inspirují žáky k úvahám o vzájemných souvislostech dvou dat, opět jsou propedeutikou pojmu korelace. Žáci jsou nuceni najít si vlastní způsob, jak se v daných datech zorientovat.
Soubor uvedených dat je inspirací pro žáky (zejména hochy), aby dělali další zkoumání. Například lze zjišťovat, zda hmotnost obránců je průměrně vyšší než útočníků.
Úloha slouží jako průpravná k úlohám, které v TIMSS 2007 zastupovala úloha M76 (M05-07).

4.1.7 KORELACE INTUITIVNĚ

1. Následující tabulka uvádí počet členů výprav na zimních olympijských hrách 2010 ve Vancouveru a počet medailí, které jednotlivé státy získaly:

Kanada	205	26	Bělorusko	49	3
USA	215	37	Rakousko	78	16
Korea	46	14	Lotyšsko	58	2
Austrálie	40	3	Finsko	95	5
Japonsko	94	5	Švédsko	106	11
Rusko	178	15	Německo	152	30
Čína	90	11	Slovensko	73	3
Česko	92	6	Polsko	50	6
Slovinsko	49	3	Norsko	100	23
Itálie	109	5	Velká Británie	52	1
Nizozemsko	34	8	Francie	107	11
Švýcarsko	144	9	Chorvatsko	18	3

a) Je patrný nějaký vztah mezi početností výpravy a počtem medailí, které olympionici přivezli domů?
b) Která země byla nejúspěšnější v počtu sportovců na jednu medaili?
c) Kolik chorvatských a kolik finských sportovců připadá na jednu medaili?

2. ***…všechno se tu změnilo, dokonce i vzduch byl jiný. Místo prudkých větrů, vysušujících a nemilosrdných, foukal lehký větřík plný vůní. Z kopců bylo slyšet šumění podobající se zvuku tekoucí vody. Bylo to šumění větru v lesích. A posléze něco ještě podivuhodnějšího: uslyšel jsem opravdové šplouchání vody tekoucí do nádrže. Spatřil jsem, že tady postavili kašnu a že má hodně vody. Nejvíc mě dojalo, že poblíž byla vysazena lípa. Byla už vzrostlá a byl to nepopiratelný symbol znovuzrození.***

Muž, který sázel stromy – Jean Giono

Zapište do tabulky, kolik je v textu slov se stejným počtem písmen a slabik (např. slovo „všechno“ je dvouslabičné a má 6 písmen, přijde tedy do druhého řádku a šestého sloupce). Vysledujte závislost počtu písmen a počtu slabik ve slovech.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11 a více**
1											
2											
3											
4											
5											
6 a více											

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

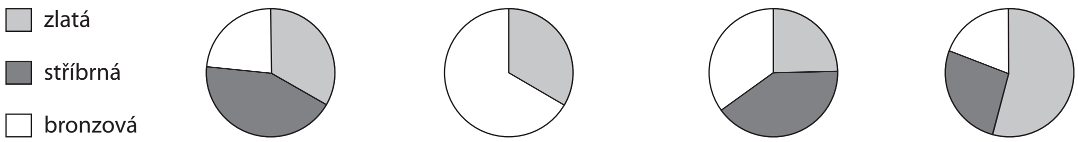
VÝSLEDKY:
1a) čím početnější výprava, tím více medailí;
1b) Nizozemsko, (nejhorší naopak Velká Británie);
1c) 6,19.
2. 7, 12, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 13, 10, 7, 2, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 4, 6, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.

KOMENTÁŘ: Platí vše, co bylo uvedeno u předchozí strany 4.1.6.

4.2 INTERPRETACE DAT

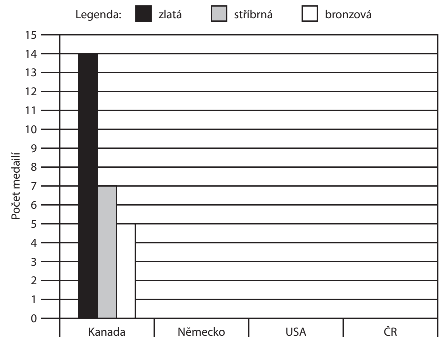
4.2.1 DATA – GRAFICKÁ ZNÁZORNĚNÍ

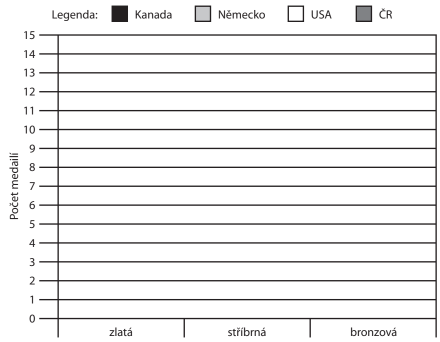
1. Na zimních olympijských hrách 2010 v kanadském Vancouveru v pořadí států podle počtu získaných medailí (zlatá, stříbrná, bronzová) první tři místa obsadily Kanada (14, 7, 5), Německo (10, 13, 7) a USA (9, 15, 13). ČR skončila na 14. místě (2, 0, 4). Ke každému grafu, který udává počet získaných medailí, doplň správný stát.



a) ___________ b) ___________ c) ___________ d) ___________

2. Sestav sloupcové grafy medailového zisku zemí z úlohy 1.





3. V zimních střediscích šest hodin vytrvale sněžilo. Každou hodinu napadlo stejné množství sněhu. Údaje uvádí tabulka.

	Vancouver	C. Mountain	Whistler
Původní výška sněhu (cm)	20	10	30
Za hodinu napadlo (cm)	6	4	2

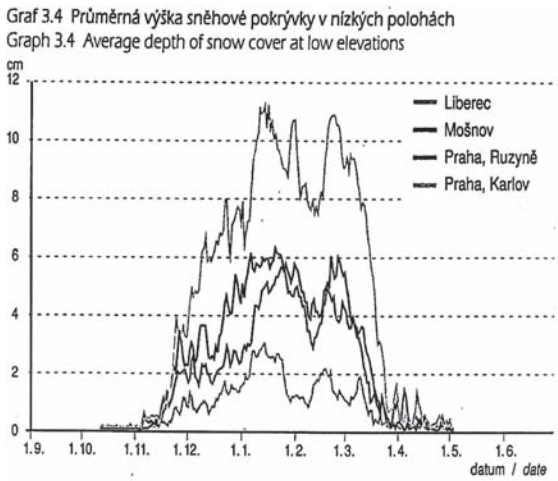
a) Na milimetrový papír zaznamenej grafem sněhovou situaci ve všech střediscích (odliš barevně).
b) Ve kterém středisku bylo po šesti hodinách nejvíce sněhu?
c) Po kolika hodinách bylo ve Vancouveru stejně sněhu jako ve Whistleru? Přečti z grafu.
d) Pokud by sněžilo se stejnou intenzitou dále, za jak dlouho by bylo stejně sněhu v C. Mountainu a ve Whistleru?

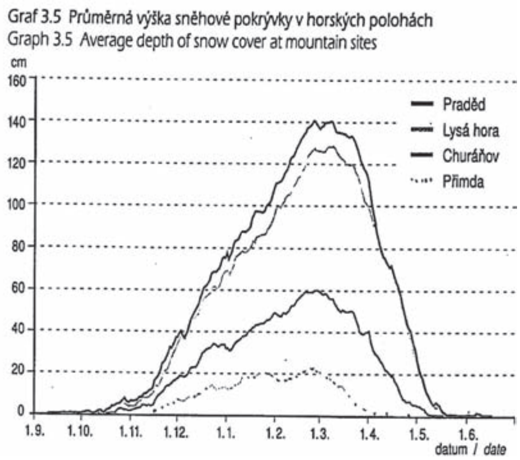
✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:
1a) Německo;
1b) ČR;
1c) USA;
1d) Kanada.
2. Výška sloupce zleva doprava: první graf – Německo 10, 13, 7; USA 9, 15, 13; ČR 2, 0, 4; druhý graf – zlatá 14, 10, 9, 2, stříbrná 7, 13, 15, 0, bronzová 5, 7, 13, 4.
3a) Vancouver: $y = 6x + 20$; C. Mountain: $y = 4x + 10$; Whistler: $y = 2x + 30$.
3b) ve Vancouveru;
3c) po 2,5 hodiny;
3d) po 10 hodinách.

4.2.2 EXTRÉMY A TENDENCE (KLESÁNÍ A RŮST)

Výška sněhové pokrývky závisí na množství a charakteru zimních srážek a na teplotě vzduchu. Je tedy ovlivněna především nadmořskou výškou místa. V publikaci Atlas podnebí Česka (z roku 2007) jsou na straně 123 uvedeny dva grafy. Graf 3.4 znázorňuje průměrnou výšku sněhové pokrývky v nízkých polohách, graf 3.5 v horských polohách.





1. **Pomocí grafů 3.4 a 3.5 urči potřebné údaje a doplň tabulku:**

Místo	Maximální výška sněhové pokrývky v cm	Přibližné datum
Liberec	11	10. 1., 1. 3.
	5,9–6,2	
		25. 1.
	140	
Churáňov		1. 3.

2. **Porovnej, jak se mění výška sněhové pokrývky v průběhu zimní sezóny v nízkých polohách a v horských polohách.**

   V nízkých polohách výška pokrývky narůstá v období ________________ a klesá v období ________________ .

   V horských polohách výška pokrývky narůstá v období ________________ a klesá v období ________________ .

   Popiš rozdíly v průměrné výšce sněhové pokrývky v průběhu zimní sezóny, které lze vyčíst z grafů 3.4 a 3.5.

   ____

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1. Liberec, 11; 10. 1., 1. 3.; Mošnov, 5,9–6,2; 3. 1., 15. 1., 22. 2.; Praha-Ruzyně, 5,5; 25. 1.; Praděd, 140, 25. 2., 10. 3.; Churáňov, 60, 1. 3.;
2. Vyžaduje diskusi žáků a spolupráci učitele.

KOMENTÁŘ: Úloha využívá reálná data získaná měřením, vyžaduje od žáků orientaci v grafu, odečítání a interpretaci hodnot. V případě, že by si podobný graf (vztahující se třeba k teplotě) vytvořil žák sám, bude jeho poznání jazyka grafů a následné práce s naměřenými daty hlubší a komplexnější.

4.2.3 PRÁCE S DATY O VÝŽIVĚ

Pepa ráno vynechal snídani doma, stavil se ale v obchodě, kde si koupil 100gramovou bagetu. Ve škole si k svačině koupil další 150gramovou bagetu a 0,5 l coly. Ve školní jídelně měl svíčkovou s pěti houskovými knedlíky. Na svačinu se stavil v rychlém občerstvení, kde si dal 300gramový hamburger a další 0,5 l colu. Večer byl docela najedený, takže místo večeře snědl u televize jen 150gramový pytlík brambůrků a vypil půl litru pomerančového džusu.

Spolužačka Jarka posnídala dva rohlíky s máslem (10 g) a džemem (50 g) a vypila hrnek kakaa (200 ml). Ve škole si dala k svačině jablko (200 g) a k obědu měla kuře (100 g) a 200gramovou porci brambor. Odpoledne snědla ovocný jogurt a vypila 0,5 l pomerančového džusu. Během celého dne mlsala mléčnou čokoládu (100 g). Povečeřela pšeničný chléb s eidamem (obojí 100 g).

Tabulky udávají energetickou hodnotu potravin v kJ na 100 g nebo 100 ml, pokud není uvedeno jinak:

Jablko	210	Brambory	335	Bageta	1 200	Máslo	3110	Pšeničný chléb	1 125
Banán	245	Rajčata	95	Hamburger	1 020	Flora	2645	Chléb celozrnný	990
Hruška	215	Paprika	80	1 knedlík	320	Hera	3100	Rohlík (40 gramů)	495
Pomeranč	130	Mrkev	140	Hranolky	810	Džem	670	Dalamánek (60 gramů)	675

Vepřová šunka	1 520	Kuře	320	Džus	180	Porce svíčkové	1 890
Drůbeží šunka	480	Krůta	500	Coca cola	160	Kakao	355
Šunkový salám	785	Hovězí maso	670	Brambůrky	2 200	Ovocný jogurt	405
Vysočina	1 940	Vepřové maso	1 220	Mléčná čokoláda	2 235	Eidam	1 080

a) Vypočítej, jaký měl Pepa během dne energetický příjem?
b) O kolik procent překročil Pepa denní doporučený příjem energie 10 000 kJ?
c) Vypočítej, jaký energetický příjem měla Jarka?
d) Sestav jídelníček s pěti denními chody, jehož energetická hodnota bude asi 10 000 kJ.
e) Vypočítej si vlastní energetický příjem během průměrného dne.

Podrobnější informace viz např. www.kalorickatabulky.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY:
a) 14 550 kJ;
b) o 45,5 %;
c) 9 501 kJ

KOMENTÁŘ: Žáci zpracovávají data získaná z rozsáhlejšího textu a tabulky, která pak využívají k řešení dalších úkolů. Respektují přitom zadané podmínky. Výsledky šetření jsou využitelné v běžném životě a úloha může sloužit jako východisko k diskusím na téma Způsoby stravování. V úlohách d) a e) jsou žáci vedeni k získávání informací z externích zdrojů, např. internetu – www.kaloricketabulky. Vztah k úloze TIMSS [M76 (M05-07)].

4.2.4 PŘEDPOVÍDÁNÍ, OČEKÁVÁNÍ, APROXIMACE

1. V tabulce je uvedena nadmořská výška v metrech (NV) a průměrná roční teplota (PT) ve stupních Celsia vybraných meteorologických stanic v ČR:

	PT	NV		PT	NV
Brno-Tuřany	8,7	241	**Milešovka**	5,2	833
České Budějovice	8,2	384	**Mošnov**	8,2	251
Doksany	8,5	158	**Olomouc**	8,7	220
Holešov	8,5	224	**Praha-Karlov**	9,4	260
Hradec Králové	8,5	244	**Praha-Ruzyně**	7,9	364
Cheb	7,2	474	**Přibyslav**	6,6	530
Churáňov	4,2	1118	**Semčice**	8,7	237
Klatovy	8,0	409	**Svratouch**	5,7	737
Kuchařovice	8,5	334	**Tábor**	7,6	450
Liberec	7,2	398	**Velké Meziříčí**	7,2	425
Lysá hora	2,6	1324	**Velké Pavlovice**	9,3	182

a) Jakou lze očekávat průměrnou roční teplotu v nadmořské výšce 1 000 m?
A) 4 °C B) 4,5 °C C) 5,5 °C D) 6 °C

b) V jaké nadmořské výšce lze očekávat průměrnou roční teplotu 0°C?
A) 1 000 m B) 1 500 m C) 1 700 m D) 2 000 m

2. V pojišťovnictví se pracuje s daty, která předpokládají věk dožití osob (naděje na dožití) podle data jejich narození. Tedy například děvčátko narozené v roce 1993 má předpokládanou délku života 76,41 roku. U hochů jsou tato čísla nižší. Tabulka uvádí naději na dožití žen při narození v ČR v letech 1993–2002.

1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
76,41	76,58	76,63	77,27	77,49	78,06	78,13	78,35	78,41	78,54

a) Jaký věk dožití můžou očekávat při stejném trendu životního stylu ženy narozené v roce 2010?

b) O kolik dní se v průměru zvýšila naděje na dožití za jeden rok?

3. Tomáš chtěl navštívit kamaráda v Brně. Sedl na rychlík, který vyjížděl v 9:44 z Prahy hl. n. V tabulce jsou uvedeny stanice na trati, jejich vzdálenost od Prahy a časy, kdy z nich vlak odjíždí.

Kolín	Přelouč	Pardubice	Choceň	Ústí nad Orlicí
62 km	91 km	104 km	139 km	154 km
10:30	10:48	10:59	11:26	11:40

a) V kolik hodin má zřejmě vlak příjezd do Brna, které je vzdáleno 255 km od Prahy?
A) 12:45 B) 13:15 C) 13:45 D) 14:15

b) Kolik kilometrů od Prahy bude nejspíše vlak ve 12:30?
A) 170 km B) 190 km C) 210 km D) 230 km

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1a)** B); **1b)** C). **2a)** 80,24; **2b)** 78 dní. **3a)** B); **3b)** C).

4.2.5 INTERPRETACE DAT

1. **Tři britští a dva němečtí liliputi si prozrazovali své výšky. Andy měří 1,5 yardu. Ben řekl: „Já mám jen 4 stopy.“ Colin na to: „To já mám dokonce 50 palců.“ Dietmar se zasmál: „To já měřím 130 centimetrů.“ „To já jsem z nás nejvyšší, měřím 1 200 milimetrů“, řekl Egon. Pomocí následující tabulky seřaď liliputy sestupně podle jejich výšky.**

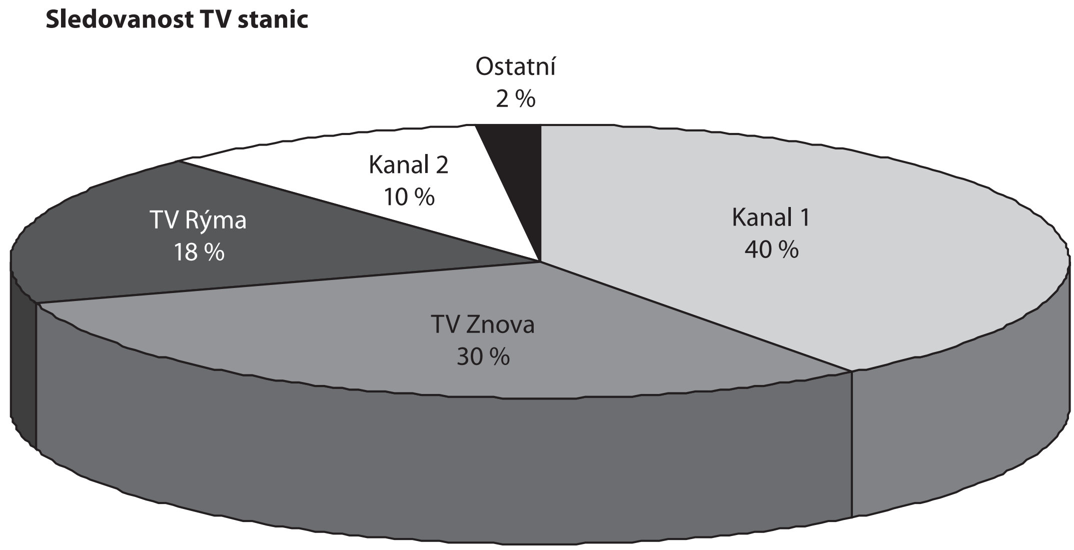
1 palec = 2,54 centimetru	1 stopa = 12 palců	1 yard = 3 stopy

2. **V roce 2008 vyrobila firma Kleine 10 400 výrobků, zatímco firma Gross 128 000. Na konci roku 2009 se šéf firmy Kleine chlubil, že v tomto roce zvýšil výrobu o 10 %, kdežto firma Gross jen o 3 %. V roce 2010 firma Kleine vyrobila 12 470 výrobků a firma Gross 135 984.**

   a) O kolik výrobků zvýšila v roce 2009 svoji produkci každá z firem?
   b) O kolik procent zvýšila každá firma svoji produkci v roce 2010 oproti roku 2009?

3. **Následující graf udává procentuální sledovanost vybraných TV stanic mezi diváky, kteří měli v danou dobu zapnutý svůj televizní přijímač. Televizi sledovalo 40 % z 10 miliónů obyvatel.**

   a) Kolik lidí se dívalo na pořad v TV Rýma?
   b) Kolik diváků sledovalo kanál 1 nebo kanál 2?



✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1. Andy, Dietmar, Colin, Ben, Egon.
2a) firma Gross o 3 840 a Kleine o 1 040 ks výrobků;
2b) Gross o 3,5 % a Kleine o 9 %.
3a) 720 000;
3b) 2 000 000.

KOMENTÁŘ: *Úlohy vyžadují orientaci v souboru dat, jejich porovnávání, třídění, převádění na souměřitelné jednotky, práci s procenty, práci s kruhovým grafem. Připravují žáky pro úlohy, jako byla M67 (M03-08) v šetření TIMSS.*

4.3 KOMBINATORIKA

4.3.1 MĚNÍME POŘADÍ

1. Scrable patří mezi oblíbené deskové hry. Stává se, že se někdy hráči dohadují, zda sestavené slovo má smysl, jindy si na správné slovo nevzpomeneme. Zkusme vypsat všechny možnosti sestavení slov ze zadaných písmen. Pro naše zkoumání stanovíme pravidla:
– K sestavení slova musíme použít vždy všechna tažená písmena.
– Písmena se ve slově neopakují.
– Hledáme všechna možná pořadí tažených písmen.

a) Pojďme prozkoumat, kolik slov lze sestavit z následujících písmen: A, E, L.
Sestav a vypiš všechna možná slova začínající písmenem

A: ________________________________ ,

E: ________________________________ ,

L: ________________________________ .

Slov začínajících písmenem A je ____ , E je ____ , L je ____ . Všech slov je _______ .

Slova, která mají smysl, jsou: ________________________________ .

b) Řeš stejnou úlohu pro písmena A, E, L, K.

2. Kolikrát můžeš přemístit písmena ve slovech VĚDA, KNIHA, STUDENT?

Písmena lze přemístit _______ krát ve slově VĚDA; _______ krát ve slově KNIHA; _______ krát ve slově STUDENT.

3. Třída 8.A navštěvuje cyklus divadelních představení. Tři nerozluční kamarádi Ota, Pavel a Roman sedí vždy vedle sebe v řadě. Mají ve zvyku sedat si na každé představení v jiném pořadí. Během jednoho školního roku navštíví celkem pět divadelních představení.

a) Podaří se jim sedět na každém představení v jiném pořadí?
b) Kolik bude možných „zasedacích pořádků“, jestliže přibude do party ještě Standa?
c) Kolik různých možností bude pro obsazení osmi míst osmi kamarády?

Doplňte odpovědi: a) _____________ ; b) _____________ ; c) _____________ .

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY:

1a) AEL, ALE; EAL, ELA; LAE, LEA; Slov od písmene A je 2, od E 2, od L 2. Všech slov je $3 \cdot 2 = 6$;
1b) Slov od A je $3 \cdot 2 = 6$, od E 6, od L 6, od K 6, celkem je $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ slov.
2. Písmena lze přemístit $4! = 24$krát ve slově VĚDA, $5! = 120$krát ve slově KNIHA, $7! = 5\,040$krát ve slově STUDENT.
3a) ano;
3b) $4! = 24$;
3c) $8! = 40\,320$.

4.3.2 KOMBINATORICKÉ SITUACE – POČÍTÁME DVOJICE

1. **Na volejbalový turnaj je přihlášeno 5 družstev. S kolika zápasy musí pořadatelé počítat, jestliže se hraje systémem každý s každým?**

2. **Třída tercie pořádá turnaj v piškvorkách. Při systému každý s každým by turnaj trval příliš dlouho, proto bylo rozhodnuto soutěžit ve třech kolech. První dvě kola jsou vyřazovací (do dalšího kola postupuje pouze vítěz), třetí se hraje systémem každý s každým. Třída tercie má 28 žáků. Vypočti, kolik zápasů bude v jednotlivých kolech sehráno.**

3. **Zjisti, kolik cinknutí skleniček se ozve při slavnostním přípitku**

   a) na domácí oslavě čtyřčlenné rodiny,
   b) na domácí oslavě pětičlenné rodiny,
   c) na narozeninové oslavě s patnácti účastníky.
   Předpokládáme, že si sklenkou ťukne každý s každým.

   Ozve se a) _____________ ; b) _____________ ; c) _____________ cinknutí.

4. **Jsou dány tři různé body *P*, *R*, *S*. Zjisti, kolik existuje úseček s těmito koncovými body. Nakresli obrázek. Úseček je _____________ .**

5. **Řeš předcházející úlohu pro**

   a) čtyři různé body *P*, *R*, *S*, *T*;
   b) pro pět různých bodů *P*, *R*, *S*, *T*, *U*.

   Úseček je a) _____________ ; b) _____________ .

6. **Je dáno šest různých bodů *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Zjisti, kolik přímek je těmito body určeno, jestliže**

   a) žádné tři body neleží v jedné přímce,
   b) body *A*, *B*, *D*, *F* leží v jedné přímce. Nakresli obrázek.

7. **Parta šesti nadšenců z 8.B se rozhodla, že na školní akademii nacvičí taneční vystoupení. Jde o pohádkový příběh se šesti různými postavami – malá holčička Evička, liška, zajíc, srnka, víla a hejkal. Tančí se v párech, v nichž se tanečníci střídají. Navrhni způsob, jak zjistíš, kolik různých párů mohou tanečníci vytvořit, a urči jejich počet.**

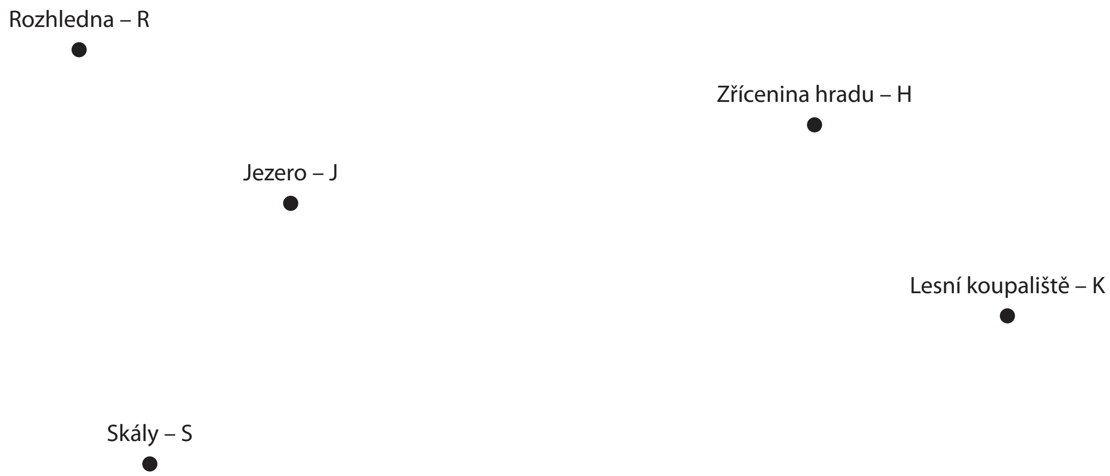
✂ ------------------------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------------ ✂

VÝSLEDKY:

1. 10.
2. 1. kolo 14 zápasů, 2. kolo 7, 3. kolo 21.
3a) 6;
3b) 10;
3c) 105.
4. 3.
5a) 6;
5b) 10.
6a) 15;
6b) 10. Podrobněji viz komentář.
7. 15.

4.3.3 CYKLOSTEZKY

V rámci projektu „Zdravé město“ se v nejmenovaném městě rozhodli využít atraktivních míst v okolí a chtějí vybudovat síť cyklostezek. Nejprve je v plánu propojení čtyř míst – rozhledny (R), jezera (J), zříceniny hradu (H) a skal (S). Poloha míst je naznačena v situačním plánku na obrázku:



a) Kolik je třeba vybudovat spojovacích cest? Požadavek je spojit cestami každé místo s každým zbývajícím. Vyznač spojovací cesty do obrázku. Místa R, J, S a H spojuje ______________ cest.

b) Kolik různých barev je třeba k vyznačení okruhů spojujících tři místa? Dokonči přehled všech okruhů: R J H; ____________________________. Je třeba ______________ barev.

c) Vybrali jsme si okruh R J H. Kolik různých vyjížděk můžeme uskutečnit, jestliže chceme místa R, J, H navštívit pokaždé v jiném pořadí? Vyjížděk na okruhu R J H je ______________.

d) Kolik je celkem možných vyjížděk s různým pořadím míst pro všechny okruhy dohromady? Vyjížděk je celkem ______________.

✂ -------------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -------------------- ✂

DALŠÍ ÚLOHY:

e) K síti cyklostezek je možné ještě přidat lesní koupaliště (K). Kolik dalších spojovacích cest bude třeba dobudovat? Kolik cest pak bude celkem?
f) Kolik dalších okruhů spojujících tři místa – O3 přibude? Kolik okruhů O3 bude celkem?
g) Kolik bude možných vyjížděk na okruzích O3 v celém areálu cyklostezek (R, J, S, H, K)?
h) Kolik bude okruhů O4? Kolik na nich bude možných vyjížděk?

VÝSLEDKY:

a) 6 cest;
b) okruhy R J H, R S J, R S H, S J H – 4 barvy;
c) $3! = 6$ vyjížděk;
d) $4 \cdot 6 = 24$,
e) přibudou 4 cesty, celkem je 10 cest;
f) navíc 6 okruhů, celkem 10;
g) $10 \cdot 3! = 10 \cdot 6 = 60$;
h) 5; $5 \cdot 4! = 120$.

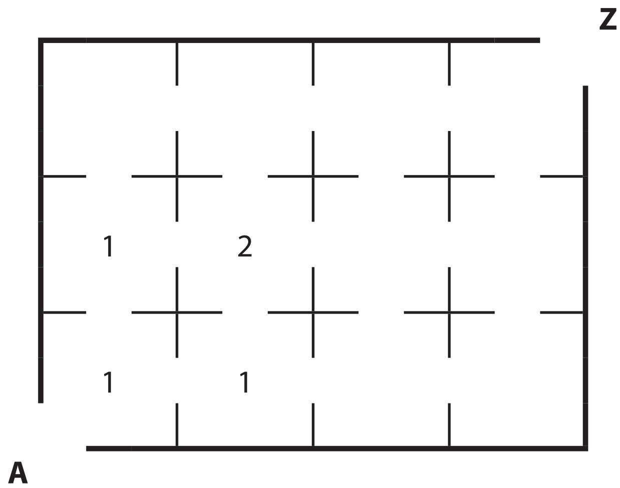
KOMENTÁŘ: Žáci nejprve tvoří dvojice, pak trojice ze čtyř míst. V otázkách a) a b) nezáleží na pořadí, v c), d) na pořadí záleží; e)–h) situaci rozšiřují na dvojice, trojice a čtveřice z pěti míst.

4.3.4 POČTY CEST

1. **Hokejový zápas skončil výsledkem 2:1. Mohl mít tyto tři průběhy:**
   1:0 2:0 2:1
   1:0 1:1 2:1
   0:1 1:1 2:1
   Zjisti, kolik různých průběhů mohl mít zápas, který skončil výsledkem

   a) 3:2;
   b) 4:3.

2. **Na prodejní výstavě elektroniky má každá firma přidělenu svoji místnost. Plán sálu s dvanácti místnostmi znázorňuje obrázek. Vchod do sálu je označen A, východ Z.**



   a) Pan Rychlý má na projetí výstavy málo času, proto se rozhodl projít jen šest místností. Zjisti, z kolika možných cest si může vybrat. Pan Rychlý má _____________ možností.
   b) Pro snadnější orientaci jsou v plánu uprostřed místností napsaná čísla, která znamenají počet cest z bodu A. Předpokládáme, že se nevracíme (jdeme pouze vpravo a nahoru). Doplň čísla do všech místností.
   c) Kolika různými cestami je možné projít všechny místnosti výstaviště od A do Z?

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1a) 10;
1b) 35.
2a) 10;
2b) 1. řádek: 1, 3, 6, 10; 2. řádek: 1, 2, 3, 4; 3. řádek: 1, 1, 1, 1;
2c) 4 způsoby.

KOMENTÁŘ: Při řešení kombinatorických úloh je třeba najít způsob, jak přehledně „zmapovat“ všechny možnosti.

1. Žáci mohou přicházet s různými možnosti záznamu průběhů zápasů, které pak lze porovnávat. Řešení úlohy pro výsledek 3:2 pomáhá nahlédnout do situace, situace s výsledkem 4:3 už vyžaduje přehledné uspořádání, stupňuje obtížnost. Druhá úloha dává možnost objevení pravidelnosti při určování počtu cest pro jednotlivé místnosti. Na tuto úlohu je možné navázat seznámením žáků se schématem Pascalova trojúhelníku a hledáním dalších pravidelností.

2. Úloha připravuje ideu Pascalova trojúhelníku. Jedná se pouze o jinou (graficky srozumitelnější) modifikaci úlohy 1a).

4.3.5 PASCALŮV TROJÚHELNÍK

Trojúhelníkové schéma čísel znázorněné na následujícím obrázku se nazývá Pascalův trojúhelník. Takto uspořádaná čísla mají zajímavé vlastnosti.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

…………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

1. **Prohlédni si schéma a na místa teček doplň další dva řádky čísel Pascalova trojúhelníku podle stejného pravidla.**

2. **Hledej v Pascalově trojúhelníku pravidelnosti:**

   a) Popiš pravidelnosti, které pozoruješ v uspořádání čísel v Pascalově trojúhelníku (tzv. Pascalova pyramida):

   b) V Pascalově trojúhelníku vyznač oblast odpovídající číslům z plánu sálu ve druhém cvičení stránky 4.3.4.

   c) Najdi a vypiš další pravidelnosti v Pascalově trojúhelníku:

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY:
1. 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1; 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.;
2a) čísla v trojúhelníku jsou rozložena osově souměrně – od středu řádku se čísla opakují;
2b) rovnoběžník;
2c) záleží na žácích, které pravidelnosti objeví.

KOMENTÁŘ: V šetření TIMSS 2007 naši žáci dosahovali nejslabších výsledků v úlohách, v nichž měli objevit pravidelnosti a vyjádřit je obecným vzorcem. Schéma Pascalova trojúhelníku je vděčným tématem při hledání pravidelností, dává prostor k mnoha diskusím. Každý žák má možnost prožít pocit úspěchu a radosti z objevu. Žáci ještě nejsou zatíženi vazbou na kombinační čísla a vidí mnoho rozmanitých vazeb mezi čísly ve schématu – například „střechu“ z 1; „podkroví“ z přirozených čísel 1, 2, 3, 4…; součet čísel v řádku je mocnina dvou, součet čísel v *n*tém řádku je 2*n* a mnoho dalších.

4.4 PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

4.4.1 JEDNODUCHÁ PRAVDĚPODOBNOST

1. **Jaká je pravděpodobnost, že při hodu mincí padne panna?**

   A) 0 B) 0,5 C) 0,75 D) 1

2. **Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne šestka?**

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$

3. **Jaká je pravděpodobnost, že si z 32 mariášových karet vytáhneš červené eso?**

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{32}$

4. **Jaká je pravděpodobnost, že si z 32 mariášových karet vytáhneš nějaké eso?**

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{32}$

5. **V osudí je 5 černých a 10 bílých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že si vytáhneš bílou kouli?**

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{15}$

6. **U přepážek v bance sedí 4 muži a 10 žen. S jakou pravděpodobností budeš jednat s mužem?**

   A) 0,4 B) $\frac{2}{7}$ C) 0,6 D) $\frac{5}{7}$

7. **Ve skladě je ve váze 20 růží (3 žluté, 5 oranžových a zbytek jsou rudé). Náhodně si potmě jednu vybereš. S jakou pravděpodobností to bude rudá růže?**

   A) 0,4 B) 0,5 C) 0,6 D) 4

8. **V prvním osudí jsou lístky s čísly 1–49 a v druhém s čísly 1–80. Z jakého osudí máš větší šanci, že bude vylosováno číslo 3?**

   A) z prvního B) z druhého
   C) v obou případech stejnou D) nelze rozhodnout

9. **V první bedně je 100 jablek, z toho 20 červených. V druhé bedně jich je ze 100 třicet červených. Z jaké bedny je pravděpodobnější, že si náhodně vezmeš červené jablko?**

   A) z první B) z druhé C) z obou stejné D) nelze rozhodnout

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1B), 2C), 3D), 4C), 5C), 6B), 7C), 8A), 9B)**

KOMENTÁŘ: V úlohách žáci získávají zkušenosti s výpočtem jednoduché pravděpodobnosti bez vzorců, na základě intuice. Úlohy **8** a **9** vyžadují posuzování situace a porovnávání dvou pravděpodobností. Jde o modifikace úloh M71 (M03-02) a M70 (M01-07) ze šetření TIMSS.

4.4.2 POSUZOVÁNÍ A POROVNÁVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTI JEVU

1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne jednička nebo dvojka?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$

2. Jaká je pravděpodobnost, že si z 32 mariášových karet vytáhneš obrázkovou kartu?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$

3. V osudí jsou 3 černé, 5 bílých a 7 zelených koulí. Jaká je pravděpodobnost, že si vytáhneš černou nebo bílou kouli?

A) 0 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{8}{15}$

4. V osudí jsou 3 černé, 5 bílých a 7 zelených koulí. Jaká je pravděpodobnost, že si vytáhneš černou, bílou nebo zelenou kouli?

A) 0 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{8}$ D) 1

5. V osudí jsou 3 černé, 5 bílých a 7 zelených koulí. Jaká je pravděpodobnost, že si vytáhneš žlutou kouli?

A) 0 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{8}$ D) 1

6. V šuplíku je 5 párů bílých a 10 párů černých ponožek. Potmě v šuplíku zašmátráš a vylovíš jeden pár. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílý?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{15}$

7. Ve třídě 8.A je 25 žáků, z toho 10 chlapců. Ve třídě 8.B je 8 chlapců z celkového počtu 20 žáků. U které třídy je pravděpodobnější, že náhodně vylosovaný žák bude chlapec?

A) v 8.A B) v 8.B
C) v obou třídách stejná D) nelze rozhodnout

8. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne sudé číslo nebo trojka?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{1}{6}$

9. Jaká je pravděpodobnost, že si z 32 mariášových karet vytáhnete srdce nebo list?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY: **1B), 2A), 3D), 4D), 5A), 6B), 7C), 8B), 9A)**

KOMENTÁŘ: Řešením úloh žáci získávají zkušenost s porovnáváním pravděpodobnosti dvou jevů, se zhodnocením situace s více podmínkami. Při řešení úloh 2 a 9 je dobré ověřit, zda žáci znají složení mariášových karet. Ve úloze 4 se žáci setkávají s jevem jistým, v úloze 5 s jevem nemožným. Při řešení úloh je možné využít manipulaci s opravdovými kartami, kostkami, koulemi. Vztah k úloze TIMSS M71 (M03-02).

4.4.3 ODHAD A PŘEDPOVÍDÁNÍ

1. **V osudí je 10 koulí, z nichž některé jsou bílé a zbylé černé. Kolik je bílých koulí, jestliže si jednu bílou kouli vytáhneš s pravděpodobností $\frac{2}{5}$?**

   A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

2. **V osudí je 10 koulí, z nichž některé jsou bílé a zbylé černé. Kolik je bílých koulí, jestliže si jednu černou kouli vytáhneš s pravděpodobností 0,7?**

   A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

3. **Pravděpodobnost, že náhodně vybrané slovo v jistém textu je sloveso, je $\frac{1}{5}$. Kolik slov má pravděpodobně celý text, je-li v něm 1 200 sloves?**

   A) 1 200 B) 3 000 C) 4 800 D) 6 000

4. **V košíku je 30 malin a zbytek jsou jahody. Pokud si náhodně vezmete jeden plod, bude to s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ jahoda. Kolik je v košíku plodů?**

   A) 15 B) 30 C) 45 D) 50

5. **V temném kumbále jsou čtyři fotbalové a několik volejbalových míčů. Pravděpodobnost, že vyndáte fotbalový míč, je $\frac{1}{4}$. Kolik je v kumbále volejbalových míčů?**

   A) 12 B) 16 C) 4 D) 8

6. **V peněžence máš jednokorunové a dvoukorunové mince. Dvoukorunovou minci vyndáš s pravděpodobností $\frac{2}{5}$. Jakou částku máš v peněžence, je-li tam 12 korun v jednokorunových mincích?**

   A) 28 B) 36 C) 20 D) 25

7. **V noře žije pět lišek a s nimi liščata. Pravděpodobnost, že z nory vyběhne lišče, je $\frac{5}{6}$. Kolik liščat žije v noře?**

   A) 20 B) 24 C) 25 D) 30

8. **Kuchař má v mrazáku zmražená kuřecí a krůtí prsa, celkem 60 balíčků. Kolik je kuřecích, jestliže krůtí prsa vyndá s pravděpodobností $\frac{2}{3}$?**

   A) 20 B) 30 C) 40 D) 50

9. **Na ciferníku hodin je velká ručička na dvanáctce a malá na trojce. Jaká je pravděpodobnost, že vteřinová ručička je mezi nimi.**

   A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1C), 2B), 3D), 4C), 5A), 6A), 7C), 8A), 9B)**

KOMENTÁŘ: Řešení úloh vyžaduje zkušenost s úlohami ze stránek 4.4.1 a 4.4.2, vede žáky k užití výpočtu pravděpodobnosti při odhadování a předpovídání výsledků, k určování počtu objektů ze známé pravděpodobnosti. Připravuje k úlohám typu M73 (M07-11) ze šetření TIMSS.

4.4.4 PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

1. **Jaká je pravděpodobnost, že při hodu mincí padne dvakrát za sebou panna?**
   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$

2. **Jaká je pravděpodobnost, že při hodu mincí padne třikrát za sebou panna?**
   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$

3. **Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne dvakrát za sebou trojka?**
   A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{9}$

4. **Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne třikrát za sebou sudé číslo?**
   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$

5. **V tašce jsou tři červená a dvě zelená jablka. Kamarád si jedno červené vzal. Jaká je pravděpodobnost, že si vezmeš také červené?**
   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$

6. **V tašce jsou tři červená a dvě zelená jablka. Kamarád si vytáhl jedno zelené. Jaká je pravděpodobnost, že ty si vezmeš červené?**
   A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$

7. **Mezi pěti sirkami je jedna krátká. Dva kamarádi před tebou si vylosovali dlouhou sirku. Jaká je pravděpodobnost, že si vylosuješ krátkou?**
   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$

8. **V kabině leží na stole dresy s čísly dva až jedenáct. Kapitán si vzal trojku a ty si po něm náhodně vezmeš nějaký dres. Jaká je pravděpodobnost, že budeš mít liché číslo?**
   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{9}$

9. **Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne třikrát za sebou trojka?**
   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{216}$ D) $\frac{1}{1296}$

10. **Hodíte současně mincí a kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne trojka a panna?**
    A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$

11. **U dvou fotbalových utkání je pravděpodobnost, že vyhrají domácí, hosté nebo zápas skončí remízou, stejná. Jaká je pravděpodobnost, že oba zápasy vyhrají domácí?**
    A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{8}$

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: **1C), 2D), 3B), 4D), 5A), 6B), 7B), 8C), 9C), 10B), 11C)**

KOMENTÁŘ: Žáci se seznamují se situacemi, v nichž je výsledek pokusu ovlivněn výsledkem pokusu předchozího, jako tomu bylo i v úloze M72 (M04-13) šetření TIMSS.

4.4.5 NORMÁLNÍ ROZLOŽENÍ

Petr čte ze statistické ročenky následující údaje:

1. Počet živě narozených chlapců podle porodní váhy (v gramech)

1 000–1 499	1 500–1 999	2 000–2 499	2 500–2 999	3 000–3 499	3 500–3 999	4 000–4 499	4 500–4 999	5 000 a více
415	877	2 509	8 607	2 2153	19 600	6 100	732	68

a) Na základě tabulky sestroj spojnicový graf.
b) Kolik vážili novorozenci nejčastěji?
Novorození chlapci nejčastěji vážili _______ gramů.
c) Kolik % chlapců mělo po porodu 4 kg a více? 4 kg a více mělo _______ % chlapců.
d) Sestroj obdobnou tabulku a graf pro vaši třídu. Porovnej obě tabulky a grafy.

2. Počet živě narozených dívek podle porodní délky (v centimetrech)

37–38	39–40	41–42	43–44	45–46	47–48	49–50	51–52	53–54	55 +
151	305	492	1 216	3 908	11 988	23 730	12 860	2 699	253

a) Na základě tabulky sestroj spojnicový graf.
b) Jaká byla nejčastější porodní délka dívek?
Nejčastější porodní délka dívek byla _______ cm.
c) Kolik % dívek mělo stejnou porodní délku jako Vy?
Stejnou porodní délku mělo _______ % dívek.

3. Vlastní průzkum: Zjisti výšku žáků ve vaší třídě a zapiš četnosti do tabulky. Z těchto údajů potom sestroj sloupcový graf.

-154	155-59	160-64	165-69	170-74	175-79	180-84	185+

✂ ------------------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------ ✂

VÝSLEDKY: **1b)** 3 000–3 499 g;
1c) 11,3 %.
2b) 49–50 cm

KOMENTÁŘ: V úlohách na této straně žáci získávají zkušenost se statistickým souborem s normálním rozložením, s vyhodnocováním reálných dat a jejich interpretací. Řeší úlohy a zodpovídají otázky s použitím dat ze souboru, jako tomu bylo v šetření TIMSS např. v úloze M77 (M05-08).

4.4.6 NÁHODNÉ ROZLOŽENÍ DAT

V tabulce jsou uvedeny výsledky fotbalových zápasů v šesti evropských ligových soutěžích.

Olomouc Teplice 6:2 Ml. Boleslav Ostrava 3:1 Jablonec Slavia 1:1 Sparta Liberec 2:0 Plzeň Bohemka Stříž. 3:2 Brno Č. Budějovice 0:3 Příbram Slovácko 2:0 Kladno Bohemka 1905 1:2	Blackburn Bolton 3:0 Wolverhampton Chelsea 0:2 Fulham Birmingham 2:1 Portsmouth Stoke City 1:2 Aston Villa Burnley 5:2 Everton Manchester U'td 3:1 West Ham Hull City 3:0 Wigan Tottenham 0:3 Manchester City Liverpool 0:0 Arsenal Sunderland 2:0	Norimberk Bayern 1:1 Werder Brémy. Leverkusen 2:2 Hamburk Frankfurt 0:0 Wolfsburg Schalke 2:1 Freiburg Hertha 0:3 Köln Stuttgart 1:5 Hoffenheim Mönchengladbach 2:2 Mohuč Bochum 0:0 Dortmund Hannover 4:1
Nice Lorient 1:0 St Etienne Montpellier 1:0 Marseille Nancy 3:1 Paříž SG Toulouse 1:0 Rennes Lille 1:2 Sochaux Olymp.Lyon 0:4 Boulogne Le Mans 1:3 Grenoble Valenciens 0:1 Bordeaux Auxerre 1:1 Lens Monako 3:0	Cagliari Parma 2:0 Bologna Juventus 1:2 Bergamo Chievo 0:1 Janov Udinese 3:0 Palermo Lazio Řím 3:1 Bari AC Milán 0:2 AS Řím Catania 1:0 Siena Neapol 0:0 Fiorentina Livorno 2:1 Inter Milán Sampdoria 0:0	Valencie Getafe 3:0 Almeria Atlético Madrid 1:0 Malaga Espaňol 2:1 Zaragoza Gijon 1:3 La Coruňa Xeréz 2:1 Barcelona Santander 4:0 Real Madrid Villarreal 6:2 Mallorca Sevilla 1:3 Osasuna Valladolid 1:1 Bilbao Tenerife 4:1

a) Zapiš do následující tabulky počet zápasů, které skončily bez branek, kolikrát padla jedna, dvě, tři atd. branky.

góly	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet zápasů										

b) Na základě této tabulky sestroj spojnicový graf.

c) Kolik branek padlo v jednom utkání nejčastěji?
Nejčastěji padlo _______ branek.

d) Vypočítej průměr branek na jeden zápas.
Průměr branek na jeden zápas je: _______ .

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY: a) viz tabulka;

góly	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet zápasů	5	7	10	17	11	3	1	1	2	0

c) 3 góly;
d) 2,91.

KOMENTÁŘ: Žáci se orientují v rozsáhlém datovém souboru, převádějí data z uspořádání v tabulce do spojnicového grafu. Je možné porovnávat vzniklý graf (Poissonovo rozdělení) s grafem úlohy z podkapitoly 4.4.4 (normální rozložení). Opět jde o činnosti obdobné úloze M77 (M05-08).

DALŠÍ KOMENTÁŘE K ÚLOHÁM NA PRÁCI S DATY

4.1.2 Jde především o úlohy, kde je potřeba užít znalostí pro výpočet aritmetického průměru. V poslední úloze se však jedná o vážený průměr. Z tabulky u úlohy 2 je možné určovat další průměrná data, např. průměrný počet výher, proher a remíz pro jedno mužstvo, průměrný rozdíl mezi počtem vstřelených a počtem obdržených branek atd. Řešení vyžaduje orientaci v rozsáhlejším souboru dat, vyhledání potřebných údajů a zodpovězení otázek – souvislost s úlohou TIMSS úlohy M76, M77.

4.1.3

1. Existují dva způsoby, jak vážený průměr známek vypočítat: 1. Zjistíme, že součet známek dívek je 23, neboť $13 \cdot 1{,}77 = 23{,}01$. U hochů je to 36, neboť $2{,}12 \cdot 17 = 36{,}04$. Tedy součet známek třídy je $23 + 36 = 59$ a průměr třídy je $59/30 = 1{,}9666\ldots$, což po zaokrouhlení je 1,97.

2. Počítáme vážený průměr „vzorcem“: $1{,}77 \cdot \frac{13}{30} + 2{,}12 \cdot \frac{17}{30} = 1{,}968$, což po zaokrouhlení dá 1,97.

3. Jde v podstatě o výběr 6 čísel z daných 12, jejichž součet je $6 \cdot 182\,\text{cm} = 1\,092\,\text{cm}$. Tato úloha má poměrně hodně řešení. Úlohy jsou přípravou pro úlohy, které v šetření TIMSS zastupovala např. úloha M69 (M04-12).

4.2.1 V úlohách klademe důraz na to, aby se žáci dokázali orientovat v souboru dat a poté je správně interpretovali a znázornili.

2. V úloze žáci znázorňují stejná data dvojím způsobem. Ve třetí úloze mohou žáci nalézt řešení trojím způsobem – tabulkovým zápisem, čtením z grafu a výpočtem. Úlohy vyžadují porovnávání různých způsobů znázornění dat – vztah k úloze M67 (M03-08), interpretaci grafického zobrazení, určení průsečíku grafů, viz M68 (M02-14).

4.2.4

1a) Když žák dá odpověď A) a bude argumentovat znalostí jisté lokality, která odpovídá údajům 1 000 m (NV) a 4 °C (PT), nelze mu jeho argumentaci upřít. Ale v diskusi třídy rozebíráme situaci, jak lze PT v NV 1 000 m předpovědět na základě údajů tabulky. Rozumná argumentace vychází z údajů Milešovky a Churáňova, neboť jsou nejblíže zadané výšce 1 000 m. Protože z celé tabulky vidíme, že obecně s nadmořskou výškou teplota klesá, je naše hledaná teplota mezi čísly 4,2 a 5,2. Tomu odpovídá odpověď B). Žáci, kteří jsou situací motivováni k hlubší analýze, vynesou si uvedené údaje do tabulky, ve které například lokalita Brno-Tuřany bude znázorněna bodem o souřadnicích (8,7; 241). Tím získáme 22 bodů a hledáme přímku, která rozložení těchto bodů aproximuje „nejlépe“ (korelační přímku).

2. Naděje na dožití, nazývaná též střední délka života, vyjadřuje počet roků, které pravděpodobně prožije osoba v daném věku. Naděje na dožití se z úmrtnostních tabulek zjistí pro jakýkoli věk, nejčastěji se setkáme s nadějí na dožití při narození, tj. ve věku 0. Na internetu lze najít mnoho údajů tohoto jevu i mnoho grafických znázornění.

3. Řešením úlohy žáci získávají zkušenosti s orientací v tabulce. Získaná data využívají pro odhadování a předpovídání konkrétních hodnot, jež přímo v tabulce uvedeny nejsou, a to v závislosti na určené podmínce. Vztah k úlohám M76 (M05-07) a M77 (M05-08).

4.3.1 Úlohy jsou zaměřeny na permutace. Při řešení úloh z kombinatoriky je důležité najít vhodný systém uspořádání množiny. Úloha **1a)** umožňuje z výčtu všech možností postupně odhalovat způsob výpočtu. Úloha **1b)** dává prostor k vlastnímu přehlednému zorganizování nově vzniklých slov, a tím k odhalení faktu, že slov je čtyřikrát víc než v předchozí úloze. Úlohu 1b) lze udělat náročnější volbou jiných písmen (například S, O, V, A). Úloha **2.** vyžaduje použití objevené zákonitosti. Při hledání slov lze využít manipulaci písmenky ze hry scrable. Úloha **3.** nabízí možnost dramatizace. Učitel má možnost seznámit žáky s pojmem faktoriál – zkrácený, symbolický zápis součinu: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ Žáci hledají pravidlo pro výpočet počtu pořadí v závislosti na počtu objektů – průprava k úloze M29 (M05-03).

4.3.2 V úlohách žáci hledají vztah (závislost) mezi počtem zadaných objektů a počtem dvojic, které z nich lze vytvořit. Jsou nuceni postupně zobecňovat. Úlohy jsou průpravou k úloze M28 (M02-07). V úlohách **4–6** může nastat situace, že žáci budou počítat úsečky (přímky) *PR* a *RP* jako různé. Je dobré situaci s žáky prodiskutovat. K řešení úloh **3** a **8** je možné využít dramatizaci.

6b) Jde o přímku *AB*, dále o přímky *CA*, *CB*, *CD*, *CF*, dále o *EA*, *EB*, *ED*, *EF* a o přímku *CE*. Může se ale stát, že přímka *CE* prochází některým z bodů *A*, *B*, *D* nebo *F*. V takovém případě bude všech přímek o 1 méně, tedy 9.

POZNÁMKY

Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání
Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007

Zpracovali: Milan Hejný, Darina Jirotková, Dominik Dvořák, Jana Hanušová, Miroslav Hricz,
Jaroslava Kloboučková, Lukáš Umáčený Milan Hejný, Darina Jirotková a kol.
Koordinovaly: Eva Šafránková, Marie Almerová
Recenzovaly: Eva Lesáková, Eva Řídká
První vydání
Vydal: Ústav pro informace ve vzdělávání, Senovážné nám. 26, Praha 1, v roce 2010
v nákladu 6 300 kusů
Jazyková redakce: ÚIV – Divize informací a služeb
Grafická úprava a sazba: ÚIV – Nakladatelství Tauris
Tisk: Comunica, a. s., Pod Kotlářkou 3, Praha 5
www.uiv.cz

ISBN 978-80-211-0612-3